Ts. NGUYỄN ĐỨC MINH

Kỹ thuật tính toán trong trắc địa bản đồ

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

Ts. NGUYỄN ĐỨC MINH

KỸ THUẬT TÍNH TOÁN TRONG TRẮC ĐỊA BẢN ĐỒ

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2004

Chịu trách nhiệm xuất bản : **Pgs, Ts. TÔ ĐĂNG HẢI**
Biên tập : THANH ĐỊNH, BÌNH SƠN
Kỹ mỹ thuật : ĐỖ PHÚ
Sửa bản in : THANH NGA
Trình bày bìa : HƯƠNG LAN

$\frac{60 - 601}{KHKT - 04}$ 6 - 271 - 04

In 500 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 cm,
tại Xí nghiệp in II, Nhà in KH&CN.
Giấy phép xuất bản số: 6-271 cấp ngày 5/1/2004.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2004.

LỜI NÓI ĐẦU

Phương pháp tính ngày càng được sử dụng nhiều trong khoa học kỹ thuật, nhất là trong thời kỳ máy tính ngày càng được sử dụng rộng rãi. Nhưng để đưa các phương pháp toán vào từng chuyên ngành cần phải đưa ra được và giải quyết được những những bài toán trong từng ứng dụng cụ thể.

Trong ngành trắc địa, bản đồ, xử lý toán học những số liệu đo đạc và tự động hoá thành lập bản đồ là công việc quan trọng bậc nhất. Để thực hiện được nhiệm vụ này, cần phải đưa ra được các bài toán, giải quyết các bài toán đó. Cụ thể hơn, cần phải thuật toán hoá được các lời giải cụ thể. Có làm được như vậy bài toán mới giải quyết được trọn vẹn và mới giúp tiến hành được quá trình tự động hoá, từ đó có thể giúp chúng ta thành lập các phần mềm ứng dụng cụ thể.

Ở nước ta khi nhập các thiết bị trắc địa, bản đồ thì nhập các phần mềm kèm theo. Vì vậy có lúc không hiểu được bản chất nên bị hạn chế trong sử dụng và khai thác.

Trong quá trình đào tạo ngành trắc địa, bản đồ kể cả ở các trường đại học, tài liệu phục vụ học tập và giảng dạy về tự động hoá xử lý tính toán, thành lập phần mềm tự động hoá thành lập bản đồ còn thiếu. Vì vậy những vấn đề trong cuốn sách nhỏ này phần nào đáp ứng được yêu cầu trên.

Sách được biên soạn thành năm phần:

- Phần một trình bày một số công cụ toán học cơ bản, chủ yếu là phương pháp toán nội suy dựa trên ý tưởng của phương pháp phần tử hữu hạn.

- Phần hai trình bày phương pháp xử lý số liệu trắc địa, bình sai. Những phương pháp này được thuật toán hoá giúp

chúng ta thành lập các phần mềm xử lý và bình sai những bài toán trong trắc địa

- Phần ba trình bày về mô hình số địa hình ở dạng chung nhất phục vụ tự động hoá thiết kế quy hoạch đứng. Tuy nhiên, mô hình số địa hình có thể xây dựng dựa trên phần tử tam giác. Một trong các phương pháp xây dựng các thành phần tam giác có đề cập ở phần bốn.

- Phần bốn trình bày một số thuật toán giúp tự động hoá thành lập bản đồ. Đó là những thuật toán giúp chúng ta hiểu được phương pháp toán của quá trình tự động hoá bản đồ và giúp chúng ta thành lập các phần mềm ứng dụng tương ứng.

- Cuối cùng là phần phụ lục đưa ra một số phương pháp toán cô đọng, với ví dụ cụ thể nhằm hỗ trợ tốt nhất cho người sử dụng trong ứng dụng khi cần thiết .

*Chúng tôi biên soạn cuốn sách này để nhớ ơn những thầy người Bungari, trong đó có giáo sư G. Zlatanov. Tài liệu chính dùng để biên soạn là cuốn "**Kỹ thuật tính toán điện tử trong trắc địa**" của Giáo sư G. Zlatanov và các tài liệu toán học trong phần "Tài liệu tham khảo".*

Do trình độ có hạn và nhiều điều kiện khác hạn chế, nên không thể đáp ứng được đầy đủ yêu cầu và không thể tránh khỏi sai sót. Chúng tôi chân thành cám ơn khi được chỉ bảo, góp ý, giúp đỡ .

Cuốn sách này có thể sử dụng làm tài liệu tham khảo học tập cho sinh viên, học sinh các trường đại học, cao đẳng, trung học có giảng dạy, học tập môn trắc địa, bản đồ. Nó cũng là tài liệu có ích cho các nhà nghiên cứu, những người làm toán ứng dụng, sản xuất phần mềm trong trắc địa, bản đồ nói riêng và toán ứng dụng nói chung.

TÁC GIẢ

Chương 1

MỘT SỐ CÔNG CỤ TOÁN HỌC CƠ BẢN

1.1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐƯỜNG VÀ MẶT TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU

1.1.1. Mô tả tham số của đường và mặt

Trong hàm ở dạng tham số mỗi điểm của đường (dạng tổng quát) biểu diễn như hàm của một hay một vài tham số. Với đường có một tham số có thể viết dưới dạng sau [7]

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

ở đây t là tham số.

Khi đó véc tơ của vị trí điểm của đường xác định ở dạng

$$P \equiv P(t) = [x(t)\ y(t)\ z(t)]. \tag{1.1.2}$$

Các thành phần x(t), y(t), z(t) được xem như tọa độ Đề các của véc tơ P.

Với khoảng xác định thường sử dụng tham số chuẩn hoá, tức là

$$0 \le t \le 1. \tag{1.1.3}$$

Tương tự mô tả đường P trong không gian hai chiều. Sự khác nhau với đường không gian, là đường hai chiều véc tơ vị trí P bao gồm hai thành phần.

Cũng tương tự như thế mô tả mặt qua hàm dạng tham số. Ở đây sử dụng hai tham số, ví dụ u và v. Khi đó mặt mô tả với hàm véc tơ của hai tham số [7]

$$P \equiv P(u, v) = [x(u, v)\ y(u, v)\ z(u, v)]. \qquad (1.1.4)$$

Thông thường cũng hay sử dụng tham số chuẩn hoá, tức là

$$0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 1. \qquad (1.1.5)$$

Đường trên mặt cũng có thể xác định nhờ cố định của tham số u hay v. Ví dụ, hàm $P(u_i, v)$ biểu diễn đường với $u = u_i = const$, còn hàm $P(u, v_i)$ - đường với $v = v_i = const$.

Điểm trên mặt có thể xác định với việc cho trị giá của hai tham số, tức $P(u_i, v_i)$.

Mô tả tham số của đường và mặt có ưu việt sau: Khi muốn có biểu diễn đồ họa của đường hay mặt thực hiện tính tuần tự các điểm tương ứng với các tham số xác định. Với dịch chuyển và xoay của hệ tọa độ không làm biến lệch hàm sử dụng tham số.

Với các đường hay mặt phức tạp không có khả năng mô tả bằng hàm cơ bản. Vì vậy phân chia nhỏ ra nhiều phần nhỏ. Đó là ý tưởng của phương pháp phần tử hữu hạn.

1.1.2 Đa thức Berstain - Beze

Trong một chứng minh của định lý thứ nhất của Vairstras sử dụng đa thức đề xuất bởi Berstain

$$B_n(x) = \frac{n!}{n!(n-k)!} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}. \qquad (1.1.6)$$

Đa thức Berstain $B_n(x)$ có bậc n, các hệ số của nó phụ thuộc vào (n + 1) giá trị của hàm f(x), được tính trong khoảng $0 \le x \le 1$ với $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$.

Từ chứng minh đó dẫn đến, rằng với mỗi số $\varepsilon > 0$ có thể tìm số N, sao cho

$$| f(x) - B_n(x) | < \varepsilon, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{1.1.7}$$

với mỗi số $n > N$, ở đây f(x) liên tục và đơn trị trong khoảng [0, 1]. Nếu n chọn đủ lớn, thì hiệu giữa f(x) và $B_n(x)$ có thể nhỏ hơn số ε nhỏ tuỳ ý.

Nếu đại lượng $f\left(\frac{k}{n}\right)$ thay đổi véc tơ r_k, thì trong khoảng $0 \le x \le 1$ đa thức

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!((n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} r_k \tag{1.1.8}$$

mô tả đoạn đường cong và gọi là dạng Berstain-Beze. Vì vậy đoạn đường cong có thể xem như xấp xỉ theo Berstain cho đa giác, đỉnh là r_k. Từ đó suy ra rằng thay đổi vị trí đỉnh dẫn đến thay đổi đường theo cách tương ứng.

Chính nhờ sự kiện này mà lần đầu tiên Beze đã đưa chứng minh định lý thứ nhất của Vaierstras vào ứng dụng trong thực tiễn. ứng dụng đầu tiên để thiết kế tự động của hãng Reno. Cũng lần đầu tiên tác giả biên soạn sách này đề xướng ứng dụng trong lĩnh vực trắc địa bản đồ để xấp xỉ, nội suy mặt địa hình và đường bình độ.

Hàm $$\varphi(x) = \frac{n!}{n!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n \tag{1.1.9}$$

tạo thành cơ sở Berstain cho tập hợp tất cả đa thức bậc n, tức tất cả đa thức bậc n có thể biểu diễn ở dạng tổ hợp tuyến tính bởi các hàm này.

1.1.3. Đường cong Beze

1) Phương trình tham số của đường cong Beze ở dạng tổng quát là [7]

$$r \equiv r(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!}\, t^i(1-t)^{n-i} r_i\,, \qquad (1.1.10)$$

ở đây r_0, r_1,.... r_n là véc tơ bán kính n + 1 đỉnh P_0, P_1, ..., P_n của đa giác đặc trưng.

Có thể chứng minh [7]

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0, \\ r(1) &= r_1, \\ \dot{r}(0) &= n(r_1 - r_0), \\ \dot{r}(1) &= n(r_n - r_{n-1}). \end{aligned} \qquad (1.1.11)$$

Và đường cong Beze luôn luôn nằm trong đa giác của Beze.

Từ (1.1.11) dẫn đến đường cong qua điểm P_0 và P_n và có hướng tiếp tuyến theo cạnh P_0P_1 và $P_{n-1}P_n$.

2) Đường cong Beze bậc ba

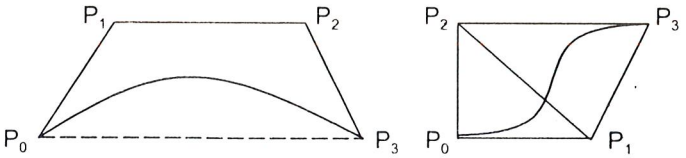
Với n = 3 nhận được đường cong Beze bậc ba ở dạng sau:

$$r \equiv r(t) = (1-t)^3 r_0 + 3t(1-t)^2 r_1 + 3t^2(1-t)r_2 + t^3 r_3. \qquad (1.1.12)$$

Trên cơ sở (1.1.11) có:

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0, \\ r(1) &= r_1, \\ \dot{r}(0) &= 3(r_1 - r_0). \\ \dot{r}(1) &= 3(r_3 - r_2). \end{aligned} \qquad (2.1.13)$$

Tức đường cong bậc ba Beze qua điểm P_0 và P_3 và hướng tuyến tính tại điểm P_0 trùng với cạnh P_0P_1, còn hướng tiếp tuyến tại điểm P_3 trùng với cạnh P_3P_2 (hình 1.1)



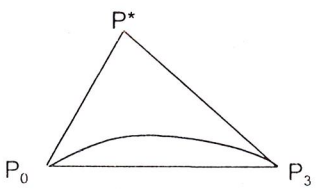
Hình 1.1

Đường cong bậc ba Beze luôn luôn nằm trong đa giác tạo thành bởi các điểm P_0, P_1, P_2, P_3 (hình 1.1).

Khi đỉnh P_1 và P_2 thay đổi thì tạo ra một họ đường Beze. Nếu điểm P_2 và P_3 gần đoạn P_0P_1 thì đường cong càng gần P_0P_1, điểm P_1, P_2 càng xa P_0P_1 thì đường cong càng xa đoạn P_0P_1. Điều này có ý nghĩa đặc biệt trong thiết kế, tạo sản phẩm, điều khiển theo quỹ đạo, v.v..

Khi đỉnh đa giác nằm trên đường thẳng, đường cong biến thành đường thẳng. Ví dụ nếu trong (1.1.12) đặt $r_1 = (2r_0 + r_3)/3$ và $r_2 = (r_0 + 2r_3)/3$ thì nhận được phương trình đường thẳng tham số dạng

$$r = (1 - t)r_0 + tr_3. \qquad (1.1.14)$$



Hình 1.2

Khi tiếp tuyến cắt ở điểm P* (hình 1.2) và nếu đặt

$$r_1 = \frac{r_0 + 2r^*}{3},$$

$$r_2 = \frac{r_3 + 2r^*}{3}, \qquad (1.1.15)$$

nhận được cung parapol với các điểm cuối P_0P_3:

$$r = (1 - t)^2 r_0 + 2t(1 - t)r^* + t^3 r_3. \qquad (1.1.16)$$

Nếu ký hiệu

$$J_0 = (1 - t)^3,$$

$$J_1 = 3t(1 - t)^2,$$

$$J_2 = 3t^2(1 - t), \qquad (1.1.17)$$

$$J_3 = t^3,$$

công thức (1.1.12) nhận dạng

$$r = r(t) = r_0 J_0 + r_1 J_1 + r_2 J_2 + r_3 J_3. \qquad (1.1.18)$$

1.1.4. Mặt Beze

Phương trình của mặt Beze bao quanh bởi bốn đường cong biên (hình 1.3) có dạng sau [7]

$$r(u, v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} r_{ij}\, g_i(u)\, g_j(v), \qquad (1.1.19)$$

$$0 \le u, v \le 1,$$

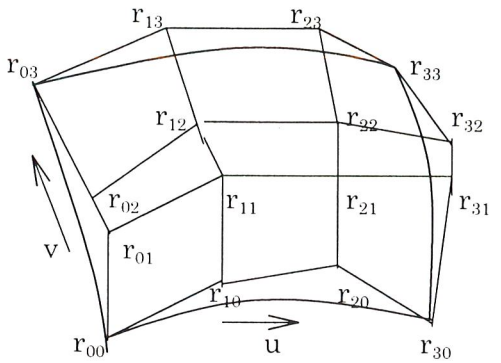
ở đây

$$g_k = \frac{3}{k!(3 - k)!}\, t^k (1 - t)^{3-k}, \qquad (1.1.20)$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

Hàm g_k là đa thức cơ sở bậc ba theo Berstain.

Đường biên r(0, v) biểu diễn đường cong Beze. Đa giác của nó xác định bởi các véc tơ r_{00}, r_{01}, r_{02} và r_{03}. Ba đường cong biên khác là r(1, v), r(u, 0) và r(u, 1).



Hình 1.3

Véc tơ r_{ij} là đỉnh của đa giác như ở hình 1.3. Chỉ có các đỉnh r_{00}, r_{03}, r_{30}, r_{33} nằm trên mặt.

Điểm r_{01} đặc trưng độ nghiêng từ điểm thứ nhất đến điểm thứ hai của đa giác Beze thứ nhất theo hướng v. Các điểm r_{10}, r_{20}, r_{31}, r_{32}, r_{23}, r_{13}, r_{02} tương tự xác định độ nghiêng tiếp tuyến tương ứng ở ba đỉnh r_{30}, r_{33}, r_{03}.

Như đã chỉ ở hình 1.3, mặt Beze xác định nếu biết các điểm r_{ij}.

Dưới hình thức công thức mặt Beze xác định bởi phương trình

$$r \equiv r(u, v) = (1uu^2u^3)MBM^T \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad (1.1.21)$$

ở đó $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$. (1.1.22)

Giá trị của r và đạo hàm tại các điểm đặc trưng mặt Beze được xác định theo công thức

$$\begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & r_v(0,0) & r_v(0,1) \\ r(1,0) & r(1,1) & r_v(1,0) & r_v(1,1) \\ r_u(0,0) & r_u(0,1) & r_{uv}(0,0) & r_{uv}(0,1) \\ r_u(1,0) & r_u(1,1) & r_{uv}(1,0) & r_{uv}(1,1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.1.23)$$

Ví dụ giá trị của véc tơ r và đạo hàm của nó ở đỉnh với tham số u = 0, v = 0 xác định theo công thức:

$$\begin{aligned} r(0,0) &= r_0, \\ r_u(0,0) &= 3(r_{10} - r_{00}), \\ r_v(0,0) &= 3(r_{01} - r_{00}), \\ r_{uv}(0,0) &= 9(r_{00} - r_{01} - r_{10} + r_{11}). \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

1.1.5. Phương trình mặt trong lân cận điểm đã cho

Trong lân cận điểm $O(x_0, y_0)$ mặt (ví dụ mặt đất) được xấp xỉ qua hàm [3]

$$H = f(x,y) \quad (1.1.25)$$

với

$$x = X - x_0,$$
$$y = Y - y_0.$$

Dạng của f(x,y) chọn với để ý

$$\frac{\partial H}{\partial x} = a_1 + 2a_2x + cy,$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = b_1 + 2b_2y + cx. \quad (1.1.26)$$

Từ đó có tiếp

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 2a_2,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 2b_2, \qquad (1.1.27)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = c.$$

Phương trình (1.1.26) và (1.1.27) đảm bảo trơn của mặt (1.1.25).

Với vi phân toàn phần của H ta có

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy . \qquad (1.1.28)$$

Sau khi lấy tích phân của (1.1.28) và để ý đến (1.1.26) nhận được

$$H = a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2 + 2cxy + k, \qquad (1.1.29)$$

ở đây k là hằng số tích phân. Sử dụng điều kiện ban đầu

$$H = H_0 \qquad (1.1.30)$$

với x = y = 0 nhận được $k = H_0$. Vì vậy, (1.1.29), tương tự (1.1.25) có thể biểu diễn dưới dạng

$$H = H_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + b_2 y^2 + 2cxy \qquad (1.1.31)$$

Công thức (1.1.31) cho ta dạng cụ thể hàm mà với nó (1.1.26) đặt chọn trước.

Từ (1.1.31) có thể thấy, với y = 0

$$H_x = H_0 + a_1 x + a_2 x^2, \qquad (1.1.32)$$

còn với x = 0

$$H_y = H_0 + b_1 y + b_2 y^2. \qquad (1.1.33)$$

Từ (1.1.31) với véc tơ hướng độ cao lớn nhất $\vec{\Gamma}$ = Grad H ta sẽ có

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial H}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial H}{\partial y}\vec{j}, \qquad (1.1.34)$$

ở đây $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là véc tơ đơn vị theo trục x và y trong hệ tọa độ (0; x,y).

Từ (1.1.34) trực tiếp tính được modul (độ lớn) của $\vec{\Gamma}$:

$$||\Gamma|| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \ . \qquad (1.3.35)$$

Hướng của $\vec{\Gamma}$ tính theo công thức

$$tg\ \gamma = \frac{b_1}{a_1} \ . \qquad (1.1.36)$$

Hệ số góc K_h cho tiếp tuyến ngang của mặt (1.1.31) là

$$K_h = tg\ w = -\frac{a_1}{b_1} \ . \qquad (1.1.37)$$

Với phương trình mặt phẳng tiếp tuyến của mặt ở điểm O ta có

$$\overline{H} = H_0 + a_1 x + b_1 y \ , \qquad (1.1.38)$$

mà được kiểm tra qua sự đúng đắn của mặt phẳng tiếp tuyến

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial x}\right)_0 , \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial y}\right)_0 . \qquad (1.1.39)$$

1.2. PHẦN TỬ TAM GIÁC

Khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn, vùng làm việc được chia thành các mảnh nhỏ. Để mô tả những mặt có phân bố ngẫu nhiên, phức tạp thì chia thành các phần tử tam giác là tốt nhất. Vì vậy phần tử tam giác hay dùng nhất.

Ở đây chỉ đưa ra một số hàm cơ sở và nội suy cơ bản, còn tìm hiểu sâu hơn phải dùng những tài liệu khác, ví dụ một số như đã chỉ dẫn ở phần tài liệu tham khảo [5].

1.2.1. Nội suy Lagrang

Dạng đầy đủ đa thức nội suy bậc m là

$$\Pi_m(x,y) = \sum_{k+l=0}^{m} \alpha_{kl} x^k y^l \qquad (1.2.1)$$

có thể sử dụng cho hàm nội suy, ví dụ u(x,y) theo giá trị ở 1/2 (m +1)(m + 2) điểm nút phân bổ cân xứng trong tam giác. Trường hợp ba điểm đỉnh tam giác với tọa độ tương ứng (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) ta có

1) Trường hợp tuyến tính (m = 1), ở đây đa thức nội suy có dạng

$$\Pi_1(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \sum_{j=1}^{3} U_j P_j^{(1)}(x,y)$$, ở đây U_j (j = 1, 2, 3)

trị của U(x,y) ở đỉnh P_j , còn

$$P_j^{(1)}(x,y) = \frac{1}{C_{jkl}}(\tau_{kl} + \eta_{kl}x - \xi_{kl}y) = \frac{D_{kl}}{C_{jkl}} \ , \qquad (1.2.2)$$

ở đó

$$\tau_{kl} = x_k y_l - y_k x_l \ , \ \xi_{kl} = x_k - x_l \ , \ \eta_{kl} = y_k - y_l \ , \qquad (1.2.3)$$

$$D_{kl} = \det\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{bmatrix}, \quad C_{jkl} = \det\begin{bmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{bmatrix} \qquad (1.2.4)$$

và cho (j, k, l) - sắp xếp tuỳ chọn từ (1, 2, 3), còn $|C_{jkl}|$ - hai lần diện tích tam giác $P_1P_2P_3$.

Không khó khăn lắm kiểm tra được

$$P_j^{(1)}(x_k,y_k) = \begin{cases} 1 \ (j = k) \\ \\ 0 \ (j \neq k) \end{cases} \qquad (1 \leq j,k \leq 3)$$

2) Trường hợp bậc hai (m = 2). Đa thức có dạng

$$\Pi_2 (x, y) = \sum_{j=1}^{6} U_j P_j^{(2)}(x,y) , \qquad (1.2.3)$$

ở đây U_j (j = 1, 2, ..., 6) - Trị của U(x,y) tại các đỉnh P_j (j = 1, 2, 3) và ở tại các điểm giữa P_j (j = 4, 5, 6) của cạnh P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1, tương ứng. Hàm $P_j^{(2)}(x,y)$ (j = 1, 2, ..., 6) được cho

$P_1^{(2)}(x,y) = P_1^{(1)}(2P_1^{(1)} - 1)$

($P_2^{(2)}(x,y)$ và $P_3^{(2)}(x,y)$ - tương tự) và

$P_4^{(2)}(x,y) = 4P_1^{(1)}P_2^{(1)}$

($P_5^{(2)}(x,y)$ và $P_6^{(2)}(x,y)$ - tương tự). Ta thấy:

$$P_j^{(2)}(x_k,y_k) = \begin{cases} 1 \ (j = k) \\ \\ 0 \ (j \neq k) \end{cases} \qquad 1 \leq j, k \leq 6)$$

3) Trường hợp bậc ba (m = 3). Đa thức nội suy có dạng

$$\Pi_3 (x, y) = \sum_{j=1}^{10} U_j P_j^{(3)}(x,y) \qquad (1.2.4)$$

ở đây U_j (j = 1, 2, 3) - Trị của U(x, y) ở các đỉnh P_1, P_2, P_3, U_j (j = 4, 5, ..., 9) - tại các điểm chia ba cạnh, còn U_{10} - trị của U(x, y) tại trọng tâm của tam giác. Các hàm cơ sở.

$$P_1^{(3)}(x, y) = \frac{1}{2} P_1(3P_1 - 1)(3P_1 - 2),$$

tương tự $P_2^{(3)}(x, y)$ và $P_3^{(3)}(x, y)$,

$$P_4^{(3)}(x, y) = \frac{9}{2} P_1P_2(3P_1 - 1),$$

$$P_5^{(3)}(x, y) = \frac{9}{2} P_1P_2(3P_2 - 1),$$

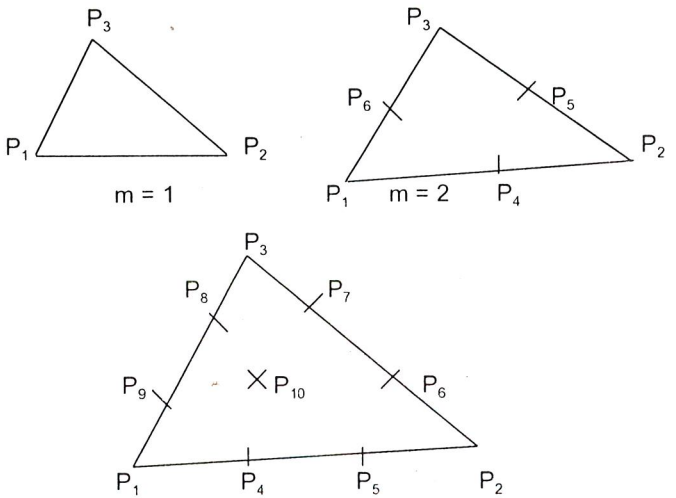
tương tự $P_6^{(3)}(x, y)$, ..., $P_9^{(3)}(x, y)$, còn

$$P_{10}^{(3)}(x,y) = 27P_1P_2P_3.$$

Tham số thứ 10 có thể loại ra nhờ tương quan

$$U_{10} = \frac{1}{4}\sum_{j=4}^{9} U_j - \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{3} U_j$$

và nhận được hàm nội suy bậc hai. Tam giác với m = 1, 2, 3 ở hình 1.2.1



Hình 1.2.1

1.2.2. Nội suy Ermit

Như trên hàm U(x,y) tại các điểm phân bố cân đối trong tam giác. Ta có thể xét hàm U(x,y) và đạo hàm tại một số điểm ít hơn.

Lớp đa thức tương ứng với bài toán này, đa thức đầy đủ $G_\gamma(x,y)$ bậc lẻ $2\gamma + 1$ ($\gamma = 1, 2, 3$) được xác định giá trị

$$D^iG_\gamma(P_j) \quad (|\ i\ | \le \gamma;\ j = 1, 2, 3),$$

$$D^iG_\gamma(P_4) \quad (|\ i\ | \le \gamma - 1). \tag{1.2.5}$$

Ở đây P_1, P_2, P_3 - đỉnh tam giác, còn P_4 - trọng tâm; $i = (i_1, i_2)$, ở đó i_1, i_2 - số nguyên không âm, $|\ i\ | = i_1 + i_2$ và $D^iG = \partial^{(i)}G/\partial x^{i1}\partial y^{i2}$. Ta đưa ví dụ với bậc ba, còn các bậc cao hơn quý vị độc giả tìm hiểu ở các tài liệu tham khảo đã dẫn.

Trường hợp bậc ba ($\gamma = 1$). Ở đây đa thức bậc ba có mười hệ số được xác định từ giá trị của hàm và đạo hàm cấp một ở các đỉnh và điểm trọng tâm, nhưng phải đơn trị.

$$G_1(x,y) = \sum_{j=1}^{4} U_j\, q_j^{(3)}(x,y) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \left[\left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]_j r_j^{(3)}(x,y) + \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]_j S_j^{(3)}(x,y) \right] \tag{1.2.6}$$

ở đây

$$q_l^{(3)}(x, y) = P_j(3P_j - 2P_j^2 - 7P_kP_l)\ ,$$

$$q_4^{(3)}(x, y) = 27P_1P_2P_3$$

$$r_j^{(3)}(x, y) = P_j\ [\xi_{jk}P_k(P_1 - P_j) + \xi_{jl}P_l(P_k - P_j)]\ ,$$

còn $S_j^{(3)}(x, y)$ nhận từ $r_j^{(3)}(x, y)$ thay ξ cho η . Trong công thức này (j, k, l) - thay vòng quanh bởi (1, 2, 3, ...).

Thật là thú vị khi xác định các điều kiện biên sử dụng phương tiện của Beze. Ví dụ giá trị hàm trên điểm phân chia cạnh nằm trên đường điều khiển bằng lồng Beze theo điều kiện ta có thể kiểm soát được.

Nếu các đỉnh của tam giác là các chỗ đặc trưng của mặt thì nội suy theo Ermit vẫn đảm bảo được mặt trơn, liên tục tại các điểm đó. Nếu trong việc thiết kế, mặt được chọn trong lớp điều khiển bằng lồng Beze thì người ta thiết kế có thể chọn được mặt theo yêu cầu của mình. Việc áp dụng những công cụ toán học tuỳ theo mục đích, yêu cầu mà vận dụng cho phù hợp, có hiệu quả.

1.2.3. Xác định nhận biết điểm thuộc tam giác

Nếu dùng mắt, khi đưa tọa độ của điểm ta nhận biết ngay điểm nằm trong tam giác nào hay không. Nhưng với máy tính, ta cần chỉ ra thuật toán để nhận biết.

Cầu lưu ý rằng, điểm m(x, y) nằm trong tam giác ijk khi nằm trên cùng một phía khi đi theo một chiều trên ba cạnh của tam giác. Ví dụ đi cùng chiều hay đi ngược chiều kim đồng hồ (xem tiết 4.2.3.1 ở chương 4). Nghĩa là, dấu của định thức thành lập từ điểm m với các cạnh ij, jk, ki là như nhau:

$$\text{sign}(C_{mij}) = \text{sign}(C_{mjk}) = \text{sign}(C_{mki}) \qquad (1.2.7)$$

ở đây C là định thức tính như ở (1.2.4).

Chương 2

XỬ LÝ SỐ LIỆU ĐO TRẮC ĐỊA

Một hệ thống tự động xử lý số liệu trắc địa thường được chia thành một số hệ thống nhỏ. Ví dụ hệ thống xử lý mạch góc cạnh có thể gồm ba phần:

1) Hệ thống tiền xử lý cho số liệu đo: thông tin vào, kiểm tra, tính toán tọa độ gần đúng, quy tâm, quy về mặt phẳng chiếu của các đại lượng đo, v.v..

2) Hệ thống tính toán bình sai: bao gồm giải một số bài toán cơ bản theo phương pháp bình phương tối thiểu để nhận được hiệu chỉnh hay ẩn số, đánh giá độ chính xác đại lượng đo và bình sai.

3) Hệ thống tính toán cuối cùng: tính các giá trị cuối cùng cần thiết bài toán đặt ra, đảm bảo sự đúng đắn của quá trình tính toán và lưu giữ những kết quả trên những loại hình mang thông tin thích hợp.

2.1. MẢNG THÔNG TIN

Thông tin trong một hệ thống thông tin được phân nhóm theo dấu hiệu đặc trưng nào đó theo các tập hợp riêng. Các thành phần của mỗi tập hợp đặc trưng bởi mục đích của bài toán mà hệ thông tin tự động xem xét giải quyết. Với mỗi tập

hợp sắp xếp một danh sách tên hay mã của các thành phần. Một mặt các thành phần đặc trưng về số lượng, chất lượng theo quan điểm giải quyết bài toán một cách đúng đắn. Tất cả thông tin được tổ chức trong các mảng thông tin. Mảng thông tin được ghi tên hay mã số thành phần gọi là mảng cơ bản. Mỗi một mảng cơ bản có nhiều mảng thông tin - có thể một chiều, hai chiều hay nhiều chiều. Trong các mảng thông tin liên quan đến mảng thông tin cơ bản được cho thông tin về số lượng và chất lượng về các thành phần.

Các mảng thông tin chứa:

- Thông tin ban đầu, nó được đọc trực tiếp từ đầu vào thiết bị máy tính (điểm đã cho, đại lượng đo,...).

- Thông tin thứ cấp: được nhận trên cơ sở tính toán xử lý phần mềm.

Thông tin ban đầu của một quá trình tính toán có thể là thông tin thứ cấp của quá trình tính toán khác.

Trong một vài trường hợp xuất hiện tập hợp thành phần thông tin phiếu tên hay mã hoá. Trong trường hợp này thông tin các thành phần tìm kiếm theo các dấu hiệu riêng biệt.

2.2. TÍNH TOÁN CHUẨN BỊ

Ở đây không có ý định xem xét một hệ thống tự động hoá xử lý thông tin trắc địa nào, mà chỉ đưa ví dụ hạn chế để nhằm hình dung con đường đi mà các công việc xử lý cần làm.

Ví dụ, công tác chuẩn bị trong một mạng góc - cạnh, cần có tọa độ gần đúng của các điểm xác định, quy tâm và hiệu chỉnh đại lượng đo về mặt phẳng tham chiếu. Để thực hiện việc này,

cần giải quyết vấn đề tìm kiếm thông tin theo tên phiên hiệu của các thành phần thông tin. Nhưng đó lại là bài toán có đặc tính tổ chức - lôgic trong một hệ thống tự động hoá xử lý thông tin trắc địa. Có thể tạm liệt kê một số công tác chuẩn bị như:

- Tìm kiếm thông tin liên quan các điểm.
- Tìm kiếm thông tin đại lượng đo hướng.
- Tính toán tọa độ gần đúng của các điểm xác định mới.
- Quy tâm và hiệu chỉnh về mặt phẳng chiếu các đại lượng đo hướng.

Những bài toán cơ bản này đều được trình bày chi tiết trong các giáo trình về trắc địa.

2.3. TÍNH TOÁN BÌNH SAI

Sau tính toán chuẩn bị đến thành lập hệ phương trình hiệu chỉnh, thông tin xuất phát để giải bài toán theo phương pháp bình phương tối thiểu. Phụ thuộc vào cách giải hệ phương trình hiệu chỉnh mà sắp xếp.

Ở đây, ta không dừng lại ở lý thuyết bình sai theo phương pháp bình phương tối thiểu, mà mô tả mặt tính toán và thuật toán hoá khi sử dụng máy tính. Vì vậy trước khi quan tâm đến những vấn đề ở đây nên nhớ lại chuyên môn "xử lý toán học các đại lượng đo trắc địa".

2.3.1. Bình sai gián tiếp

Bài toán bình sai gián tiếp được mô tả như sau:

Cho hệ phương trình hiệu chỉnh

$$v_1 = a_1x_1 + b_1x_2 + ... + u_1x_u + f_1 \text{ với trọng số } p_1,$$
$$v_2 = a_2x_1 + b_2x_2 + ... + u_2x_u + f_2 \text{ với trọng số } p_2,$$
$$.....,$$
$$v_n = a_nx_1 + b_nx_2 + ... + u_nx_u + f_n \text{ với trọng số } p_n. \quad (2.3.1)$$

Tìm ẩn $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn điều kiện

$$[PVV] = \min. \quad (2.3.2)$$

Để thể hiện ở dạng ma trận, ta đưa các ký hiệu ma trận:

$$\underset{(n,u)}{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & u_2 \\ \cdots & \cdots & & \\ a_n & b_n & \cdots & u_n \end{bmatrix}; \underset{(n,1)}{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}; \underset{(n,1)}{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix}; \underset{(u,1)}{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_u \end{bmatrix} \quad (2.3.3a)$$

Và ma trận trọng số của trị đo

$$\underset{(n,n)}{P} = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1^2} & & & \\ & \frac{1}{m_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{m_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.3.3b)$$

Ở đây k là hằng số dương tuỳ chọn, còn m_i (i = 1,n) là các sai số trung phương của trị đo.

Với (2.3.3.a) và (2.3.3.b) các phương trình (2.3.1) và (2.3.2) có thể viết ở dạng ma trận:

$$\underset{(n,1)}{V} = \underset{(n,u)}{A}\ \underset{(u,1)}{X} + \underset{(n,1)}{F}; \quad (2.3.1a)$$

$$\underset{(1,n)}{V^*}\ \underset{(n,n)}{P}\ \underset{(n,1)}{V} = \min. \quad (2.3.2.a)$$

ở đây * là ký hiệu của hoán vị.

Bài toán có lời giải nên ma trận A không suy biến.

Phương trình (2.3.1) và (2.3.2), tương ứng (2.3.1.a) và (2.3.2.a) dễ dàng chuyển sang bình sai trị đo với cùng trọng số. Đặt ở (2.3.3.b) k=1, ta có thể viết

$$\underset{(n,n)}{P^{1/2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{p_1} & & & \\ & \sqrt{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{p_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & & & \\ & \frac{1}{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{m_n} \end{bmatrix}$$

Nhân (2.3.1.a) từ bên trái với $p^{1/2}$, ta có

$$\hat{V} = \hat{A}X + \hat{F}, \qquad (2.3.1.b)$$

ở đây ta nhận ký hiệu

$$\hat{V} = P^{1/2}V; \quad \hat{A} = P^{1/2}A; \quad \hat{F} = P^{1/2}F. \qquad (2.3.4)$$

Như vậy điều kiện (2.3.2.a) thay đổi về dạng

$$\hat{V} * \hat{V} = \min. \qquad (2.3.2.b)$$

Phương trình (2.3.1.b) và (2.3.2.b) đặc trưng cho bình sai gián tiếp cho các đại lượng cùng độ chính xác.

Tương ứng với (2.3.4) đưa vào ký hiệu

$$\hat{a}_i = \frac{a_i}{m_i}, \ \hat{b}_i = \frac{b_i}{m_i}, \ \ldots, \ \hat{u}_i = \frac{u_i}{m_i}$$

$$\hat{v}_i = \frac{v_i}{m_i}; \ \hat{f}_i = \frac{f_i}{n_i}, \qquad (2.3.5)$$

$$i = \overline{1,n}.$$

Các đại lượng $\hat{v}_i$, $\hat{f}_i$ gọi là hiệu chỉnh chuẩn hoá, tương ứng f_i - số hạng trị đo chuẩn hoá.

Hiệu chỉnh của đại lượng đo thực tế nhận được từ hiệu chỉnh chuẩn hoá suy từ (2.3.5):

$$v_i = \hat{v}_i m_i . \qquad (2.3.6)$$

Lưu ý rằng, các ẩn số x_1 , x_2 .....,x_u cùng là một ở phương trình (2.3.1.b) cũng như ở phương trình (2.3.1.a). Điều đó nói rằng ma trận hệ số trọng số của chúng cũng là một ở hai cách mô tả của bài toán bình sai gián tiếp.

Vấn đề đặt ra, nếu ta xác định ma trận hệ số trọng số cho giá trị bình sai chuẩn hoá $\hat{\bar{l}}_i = \hat{l}_i + \hat{v}_i = \dfrac{l_i + v_i}{m_i} = \dfrac{\bar{l}_i}{m_i}$, bằng cách nào để xác định hệ số trọng số của trị chưa chuẩn hoá $\bar{l}_i$? Vấn đề này gắn liền với việc tính ma trận trọng số của cột y, nhận được từ biến đổi tuyến tính của cột x, mà ma trận hệ số trọng số là Q_x đã được tính.

Giả sử biến đổi nêu trên ở dạng

$$\underset{(m,1)}{y} = \underset{(m,n)}{s} \quad \underset{(n,1)}{x} + \underset{(m,1)}{y_0}, \qquad (2.3.7)$$

Ở đây s là ma trận biến đổi, y_0 là cột thành phần cố định.

$$\underset{(m,m)}{Q_y} = \underset{(m,n)}{S} \quad \underset{(n,n)}{Q_x} \quad \underset{(n,m)}{S^*}, \qquad (2.3.8)$$

Q_y là ma trận hệ số trọng số cần tìm.

Ma trận hệ số trọng số là đối xứng và xác định không âm.

Bây giờ ta hướng tới vấn đề đáng quan tâm, là bằng cách nào để xác định ma trận hệ số trọng số Q_l cho cột trị bình sai $\bar{l} = l + v$, nếu đã biết ma trận hệ số trọng số $Q_{\hat{l}}$ của cột $\hat{\bar{l}} = \hat{l} + \hat{v}$.

Tương ứng với phương trình cuối cùng của (2.3.4) ta có

$$\hat{\bar{l}} = P^{1/2}\bar{l}. \tag{2.3.9}$$

Công thức (2.3.9) cho chúng ta cách biến đổi của cột $\bar{l}$ vào cột $\hat{\bar{l}}$. Từ (2.3.9) ta nhận được ngay quan hệ ngược

$$\bar{l} = P^{-1/2}\hat{\bar{l}}. \tag{2.3.10}$$

Từ (2.3.10) với để ý đến (2.3.8) ta có

$$Q_l = P^{-1/2}Q_{\hat{l}}P^{-1/2} \tag{2.3.11}$$

Với các thành phần đường chéo của Q_l, lưu ý vào (2.3.11) ta có

$$(Q_{\hat{l}})_{ii} = \frac{1}{P_{\hat{l}i}} = P_i^{-1/2}(Q_{\hat{l}})_{ii}P_i^{-1/2} =$$

$$= P_i^{-1}\frac{1}{P_{\hat{l}i}} = m_i^2\frac{1}{P_{\hat{l}i}}. \tag{2.3.12}$$

Công thức (2.3.12) cho phép ta xác định trọng số đảo của đại lượng bình sai $\bar{l}_i = l_i + v_i$ khi biết sai số (trọng số) của trị đo l_i là m_i, và trọng số đảo của trị chuẩn hoá $\hat{\bar{l}}$ là $\frac{1}{P_{\hat{l}i}}$.

Công thức (2.3.12) có thể viết cách khác

$$\frac{1}{P_{\hat{l}i}} = m_i^2\frac{1}{P_{\hat{l}i}}.$$

Tương ứng

$$m_{\hat{l}i} = m_i m_{\hat{l}i}. \tag{2.3.13}$$

Việc tính toán giải bài toán bình sai gián tiếp, về nguyên lý tồn tại hai cách: qua phép khử tuần tự (cách gián tiếp) và cách trực giao tuần tự (cách trực tiếp).

Các phương pháp gián tiếp có thể kể đến ngay thuật toán Gauss. Thuật toán này mặc dù phương diện lập trình không có gì khó khăn nhưng cũng không ưu việt hẳn so với các phương pháp khử khác như thuật toán Banaxiêvich. Vì vậy đối với phương pháp gián tiếp ta sẽ xem xét thuật toán Banaxiêvich.

Phương pháp trực giao tuần tự cũng có các cách nhìn, ở đây ta chỉ xem xét với trường hợp làm việc với kích thước nhỏ.

Ở phương pháp trực tiếp không cần phải thành lập phương trình chuẩn, có khả năng tính được các hiệu chỉnh mà không cần biết nghiệm các ẩn số.

2.3.1.1. Thuật toán Banaxiêvich

1. Cho phương trình hiệu chỉnh dưới dạng ma trận

$$\underset{(n,1)}{V} = \underset{(n,u)}{A} \quad \underset{(u,1)}{X} + \underset{(n,1)}{F} \qquad (2.3.14)$$

Và bài toán giải với điều kiện

$$[VV] = V^* V = \min \qquad (2.3.15)$$

Như vậy bình sai các trị đo cùng độ chính xác hay là giải phương trình hiệu chỉnh chuẩn hoá theo phương pháp bình phương bé nhất, không cần thiết phải đặt ký hiệu dấu "^" như trên.

Như đã biết, điều kiện (2.3.15), tương đương với phương trình:

$$[av] = [bv] = ... = [uv] = 0 \qquad (2.3.16)$$

Ở đây a_i là cột thứ nhất của ma trận A, b_i là cột thứ hai, ..., u_i - cột cuối cùng của A ($i = \overline{1,n}$).

Phương trình (2.3.16) có thể viết dưới dạng ma trận

$$A^* \; V = 0 \qquad (2.3.17)$$

$$(u,n)\ (n,1)\ (u,1)$$

Và như thế điều kiện (2.3.15) có thể thay bởi điều kiện tương đương (2.3.17).

Nhân phía trái (2.3.14) với A* và lưu ý đến (2.3.17), ta nhận được

$$A^* V = (A^* A) X + A^* F = 0 \qquad (2.3.18)$$

Phương trình (2.3.18) viết dưới dạng ma trận của hệ phương trình chuẩn cho ẩn số $x_1, x_2, ..., x_n$.

Ký hiệu:

$$A^* A = N \qquad (2.3.19)$$

$$A^* F = L$$

Với (2.3.19) phương trình (2.3.18) thay đổi thành dạng

$$N X + L = 0 \qquad (2.3.20)$$

Điều quan tâm là xác định ma trận trọng số của cột Z. Nhìn vào phương trình (2.3.19) và (2.3.8) và lưu ý rằng F là cột số hạng tự do chuẩn hoá, tức là $Q_F = E$, ta có

$$Q_L = A^* Q_F A = A^* E A = A^* A = N. \qquad (2.3.21)$$

Ở (2.3.21) ta nhận được một tính chất quan trọng của hệ phương trình chuẩn (2.3.20), chính là ma trận của hệ số phương trình chuẩn là ma trận hệ số trọng số của số hạng tự do của hệ đó.

Có thể chứng minh rằng nếu A là ma trận không suy biến, sẽ tồn tại một phép phân tích duy nhất (Xem phụ lục phần III)

$$N = R^* R, \qquad (2.3.22)$$

Ở đây R là ma trận tam giác trên với thành phần đường chéo dương. Phân tích (2.3.22) còn sử dụng để giải hệ (2.3.20).

Thế (2.3.22) vào (2.3.20), ta có

$$(R^* R) X + L = 0 \qquad (2.3.23)$$

Nhân phía trái (2.3.23) với R^{*-1}, ta có

$$R X + \rho = 0, \qquad (2.3.24)$$

Ở đây ta đưa vào ký hiệu

$$\rho = R^{*-1} L \qquad (2.3.25)$$

Phương trình (2.3.24) là dạng ma trận của hệ phương trình khử với ẩn số $x_1, x_2, ..., x_u$.

Phương trình (2.3.24) cũng có một thú vị đặc biệt. Thật vậy, khi xác định ma trận hệ số trọng số của cột ρ, lưu ý đến (2.3.21) và (2.3.22) ta có

$$Q_\rho = R^{*-1} Q_L R^{-1} = R^{*-1} N R^{-1} =$$
$$= (R^{*-1} R^*)(R R^{-1}) = EE = E \qquad (2.3.26)$$

Nói cách khác số hạng tự do của hệ phương trình khử (2.3.24) là các đại lượng độc lập và cùng độ chính xác. Đó là một đặc thù quan trọng của hệ phương trình khử (2.3.24) trong thuật toán Banaxiêvich. Giải (2.3.24) ta nhận được

$$X = -R^{-1} \rho \qquad (2.3.27)$$

Từ (2.3.27) ta nhận được ngay ma trận hệ số trọng số của cột ẩn số:

$$Q_x = R^{-1} Q_\rho R^{*-1} = R^{-1} R^{*-1} = (R^* R)^{-1} = N^{-1} \qquad (2.3.28)$$

Một quan trọng đặc biệt là thành phần đường chéo của Q_x cũng là hệ số trọng số của ẩn số.

Với chúng, ta có:

$$(Q_x)_{ii} = 1/P_{Xi} = \sum_{j=i}^{u} (R^{ij})^2, \qquad (2.3.29)$$

ở đây R^{ij} là ký hiệu thành phần tương ứng của R^{-1}.

Đánh giá độ chính xác của hàm với biểu diễn tuyến tính dạng (2.3.7), lưu ý đến (2.3.8)

$$Q_y = S\, Q_x\, S^* = S\,(R^{-1}.R^{*-1})S^* = (S\,R^{-1})(S\,R^{-1})^*. \qquad (2.3.30)$$

Từ (2.3.30) thấy rằng với thành phần đường chéo của Q_y (trọng số đảo của y_i) không cần tính Q_x, chỉ cần ma trận R^{-1}. Điều đó nói nên rằng ta có thể đánh giá độ chính xác của mỗi trị bình sai $\bar{l}_i = l_i + v_i$ không cần tính ma trận hệ số trọng số. Trong trường hợp này, chỉ cần thay trong phương trình (2.3.14) $F = l_0 - l$. Khi đó

$$\bar{l} = l + v = A\,X + l_0$$

Ở đây l là cột trị đo, còn l_0 là cột trị gần đúng và áp dụng ở công thức (2.3.30) với xác định cho Q_l ($A \equiv S$).

2. Sau khi trình bày giải bài toán bình sai gián tiếp theo Banaxiêvich, chúng ta đi đến việc thuật toán hoá việc giải qua xây dựng một hệ thống tự động xử lý, tính toán.

Hệ phương trình chuẩn sẽ thành lập theo cách sau.

Hệ số và số hạng tự do của phương trình hiệu chỉnh thứ i được sắp xếp thành ma trận hàng $\overline{A_i}$:

$$\overline{A_i} = [a_i\ b_i \ldots u_i\ f_i].$$

(1,u+1)

Từ đó tạo thành ma trận

$$\overline{N_i} = \overline{A_i} * \overline{A_i} = \begin{bmatrix} a_i^2 & a_i b_i & \cdots & a_i u_i & a_i f_i \\ a_i b_i & b_i^2 & \cdots & b_i u_i & b_i f_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_i u_i & b_i u_i & \cdots & u_i^2 & u_i f_i \\ a_i f_i & b_i f_i & \cdots & u_i f_i & f_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.3.31)$$

Tổng tất cả ma trận $\overline{N}_i (i = \overline{1,n})$ sẽ nhận được ma trận đầy đủ hệ số phương trình chuẩn

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{n} \overline{N}_i = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] & \ldots & [au] & [af] \\ [ab] & [bb] & \ldots & [bu] & [bf] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [au] & [bu] & \ldots & [uu] & [uf] \\ [af] & [bb] & \ldots & [uf] & [ff] \end{bmatrix} \quad (2.3.32)$$

Việc thành lập ma trận $\overline{N}$ không nên ghi ma trận dưới đường chéo vì có sự đối xứng. Mặt khác nếu ghi thì sẽ tốn bộ nhớ. Vì thế ma trận $\overline{N}$ đáng lẽ hai chiều (u + 1,u + 1) ta ghi thành ma trận một chiều với độ lớn (u + 1)(u + 2)/2. Vị trí của phần tử $\overline{N_{ij}}$ ($i \le j$) trong mảng một chiều này có thể xác định bằng công thức

$$ij = \frac{(i-1) * (2 * (u+1) - i)}{2} + j \quad (2.3.33)$$

Ví dụ với u = 3, hàng thứ hai, cột thứ ba (i = 2,j = 3), sẽ có

$$ij = \frac{(2-1) * (2 * (3+1) - 2)}{2} + 3 = 6$$

Ma trận $\overline{N}$ trong trường hợp A không suy biến và F ≠ 0 sẽ là ma trận xác định dương. Ngoài ra $\overline{N}$ còn đối xứng nên có thể phân thành tích của hai ma trận tam giác (xem phụ lục III)

$$\overline{N} = \overline{R} * \overline{R}, \tag{2.3.34}$$

Ở đây $\overline{R}$ là ma trận tam giác trên với trị thực và dương đối với tất cả thành phần trên đường chéo.

Ta chứng minh rằng

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} R & \rho \\ . & \sqrt{[vv]} \end{bmatrix} \tag{2.3.35}$$

ở đây với ma trận thành phần ứng với (2.3.32) và (2.3.25).

Thật vậy, nếu (2.3.35) là đúng, thì cần:

$$\overline{R} * \overline{R} = \begin{bmatrix} R* & . \\ \rho* & \sqrt{[vv]} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R & \rho \\ . & \sqrt{[vv]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & L \\ L* & [ff] \end{bmatrix} \tag{2.3.36}$$

Công thức (2.3.36) có:

$$\begin{aligned} &R^* R = N; \\ &R^* \rho = L \rightarrow \rho = R^{*-1} L; \\ &\rho^* \rho + V^* V = F^* F; \end{aligned} \tag{2.3.37}$$

ở đây ta thay $[vv] = V^* V$; $[ff] = F^* F$.

Từ phương trình cuối cùng của (2.3.37)

$$\begin{aligned} V^* V &= F^* F - (L^* R^{-1}) \rho = \\ &= F^* F + L^* X = F^* F + F^* AX = \\ &= F^*(F + AX) = F^* V. \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

ở đây lưu ý $R^{-1} \rho = X$ và $L = A F$

Phương trình (2.3.38) đã rõ ở môn xử lý toán học các đại lượng trắc địa tương đương với biểu thức

$$[vv] = [fv].$$

Hai phương trình đầu trong (2.3.37) trùng với (2.3.22) và (2.3.25). Sự diễn giải của (2.3.38) chứng minh đúng của phương

trình thứ ba của (2.3.37) vì vậy (2.3.35) là đúng, điều mà ta chứng minh.

Nếu ma trận $\overline{R}$ thành phần cuối cùng $\sqrt{[vv]}$ thay bằng 1, tức ma trận.

$$\widetilde{\overline{R}} = \begin{bmatrix} R & \rho \\ . & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.3.39)$$

Nghịch đảo ma trận này ta nhận được ma trận tam giác với nội dung

$$\widetilde{\overline{R}}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & X \\ . & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.3.40)$$

Nếu theo định nghĩa của ma trận đảo, thì cần

$$\widetilde{\overline{R}}\widetilde{\overline{R}}^{-1} = \widetilde{\overline{R}}^{-1}\widetilde{\overline{R}} = E$$

Kiểm tra lại, ta có:

$$\begin{bmatrix} R & \rho \\ . & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R^{-1} & X \\ . & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RR^{-1} & RX+\rho \\ . & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & . \\ . & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.3.41)$$

ở đây ta chú ý đến (2.3.24) và quan hệ $RR^{-1} = E$.

Từ diễn giải đến đây ta thấy rằng, toàn bộ diễn ra một quá trình tính toán liên tục, thực hiện biến đổi theo sơ đồ sau:

$$\overline{N} \to \overline{R} \to \widetilde{\overline{R}} \to \widetilde{\overline{R}}^{-1}. \qquad (2.3.42)$$

Ma trận $\widetilde{\overline{R}}^{-1}$ chứa tất cả những gì cần thiết: ẩn số, thông tin cho tính hệ số trọng số (xem công thức 2.3.29)

Thành lập ma trận $\overline{N}$ thực chất theo công thức (2.3.31 và 32).

Biến đổi $\overline{N} \to \overline{R}$ thực hiện theo phép khử liên tiếp theo công thức:

$$R_{KK} = \overline{N}_{KK_K} = \sqrt{\overline{N}_{KK_{K+1}}};$$

$$\overline{R}_{kj} = \overline{N}_{kj.k} = \overline{N}_{kj.k-1} \Big/ \overline{N}_{kk.k} \quad (j = \overline{k+1, u+1})$$

$$\overline{N}_{ij.k} = \overline{N}_{ij.k-1} - \overline{N}_{ki.k}\overline{N}_{kj.k} \; (i = \overline{k+1, u+1}; j = \overline{i, u+1})$$

$$k = 1, 2, \ldots, u+1$$

Biến đổi

$$\overline{R} \to \tilde{\overline{R}}$$

đơn giản chỉ thay phần tử cuối cùng của $\overline{R}$ bằng 1.

Biến đổi cuối cùng

$$\tilde{\overline{R}} \to \tilde{\overline{R}}^{-1}$$

là lật ngược ma trận tam giác trên (u+1) hạng.

$$\tilde{\overline{R}}^{ii} = 1 \Big/ \tilde{\overline{R}}_{ii} \quad (i = \overline{1, u+1});$$

$$\tilde{\overline{R}}^{ij} = -\frac{1}{\tilde{\overline{R}}_{jj}} \sum_{k=i}^{j-1} \tilde{\overline{R}}_{kj}\tilde{\overline{R}}^{ik} = -\tilde{\overline{R}}^{jj} \sum_{k=i}^{j-1} \tilde{\overline{R}}_{kj}\tilde{\overline{R}}^{ik}$$

$$i, j = \overline{1, u+1}, i < j. \qquad (2.3.44)$$

ở đây thành phần của $\tilde{\overline{R}}^{-1}$ chỉ số phía trên, còn thành phần của $\tilde{\overline{R}}$ chỉ số ghi ở phía dưới.

Đánh giá chính xác cần tính sai số trọng số đơn vị m_e

$$m_e = \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} \qquad (2.3.45)$$

ở đây v là hiệu chỉnh chuẩn hoá.

Thuật toán không đề cập đến việc dành bộ nhớ để ghi ma trận $\overline{A}_i$. Điều đó có nghĩa sau khi bình sai số hiệu chỉnh không tính được từ phương trình hiệu chỉnh. Nhưng đối với tính toán bình sai bằng máy tính thì điều đó cũng không gây phiền toái

gì, vì hiệu chỉnh có thể tính từ hiệu của bình sai và trị đo một cách dễ ràng.

2.3.1.2. Sơ đồ khối và đồ hình của thuật toán Banaxiêvich

Trong sơ đồ khối (hình 2.3.1), đặc biệt trong đồ hình (hình 2.3.2) với thuật toán Banaxiêvich ta cho rằng, phương trình hiệu chỉnh (hệ số và số hạng tự do) đã đưa về trọng số 1 tức ta có các phương trình hiệu chỉnh chuẩn hoá.

Trong sơ đồ hình (hình 2.3.2) tham gia các mảng:

Mảng một chiều với độ dài u + 1. Trên đó tuần tự ghi các phương trình sai số.

N- Mảng một chiều với độ dài (u + 1)*(u + 2)/2, trong đó ghi hệ số và số hạng tự do của phương trình chuẩn; thành phần cuối cùng của N ghi [ff]. Lưu ý rằng trong đồ hình mảng N, vị trí ij của hàng i cột j là

$$ij = (i-1)*(2*(u+1)-i)/2+j.$$

Ma trận $\overline{N}$ ghi theo hàng, bỏ không ghi các thành phần dưới đường chéo chính.

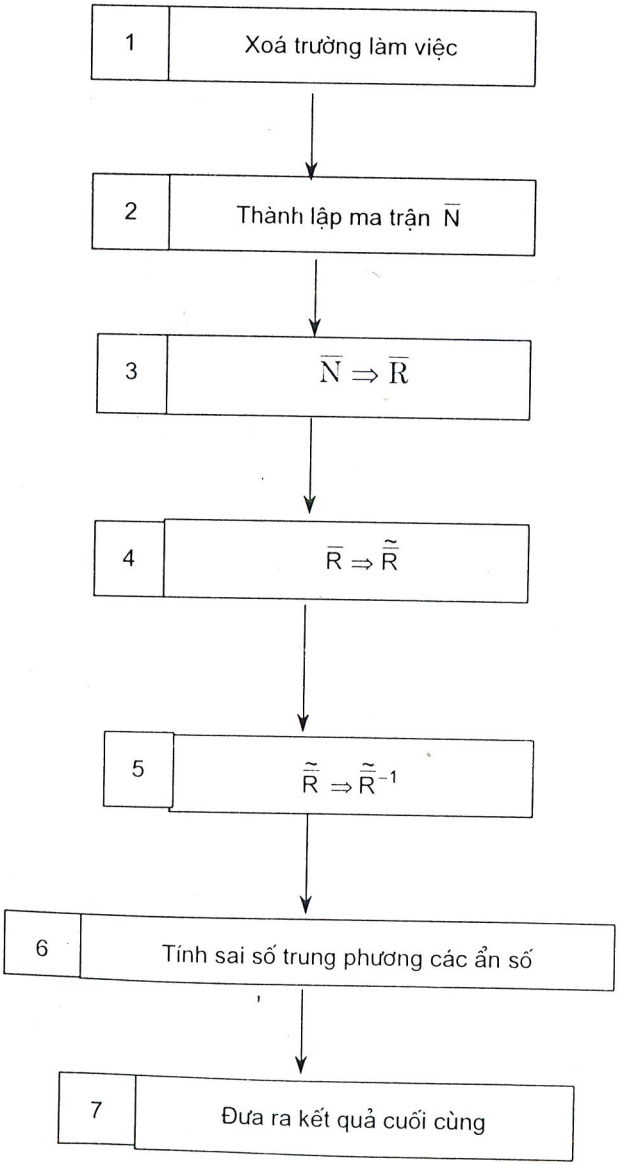
X, QX, MX - Mảng một chiều với độ dài u, trong đó ghi ẩn số.

Các thành phần của ma trận $\overline{R}$ ghi ngay trên ma trận $\overline{N}$, Còn $\overline{\overline{R}}^{-1}$ - trên $\overline{\overline{R}}$. Vấn đề là theo tuần tự biến đổi các thành phần trên cùng một mảng. Ban đầu chứa $\overline{N}$, tiếp đến $\overline{R}$ và cuối cùng là chứa $\overline{\overline{R}}^{-1}$.

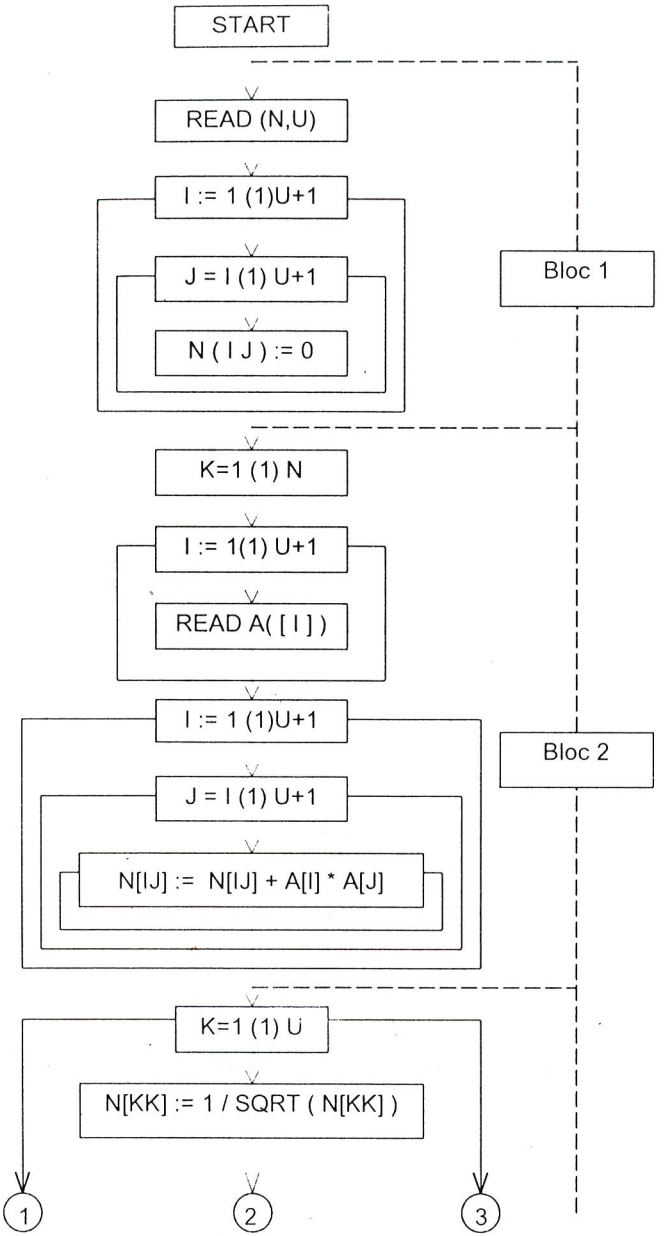
Từ $\overline{N}$ đến $\overline{R}$ (Bloc 3) không cần thiết phải thực hiện u + 1 bước biến đổi, vì u + 1 bước chỉ thực hiện

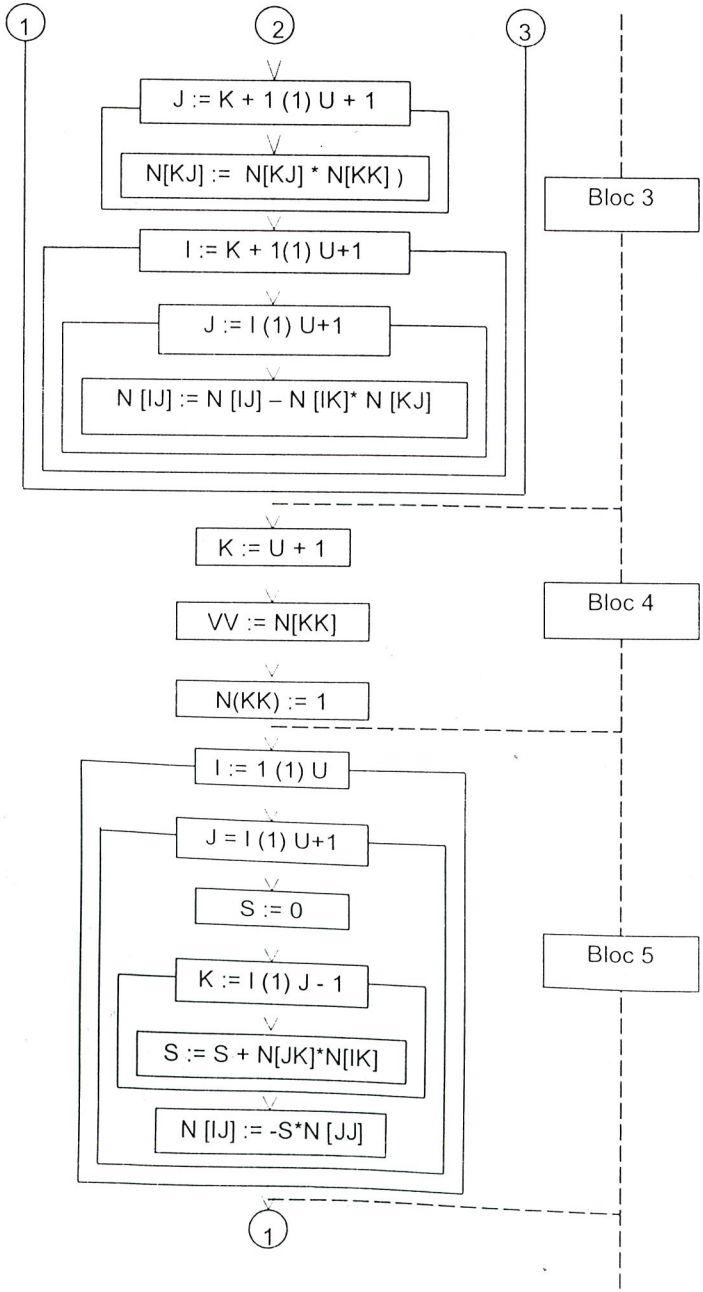
$$[vv] \rightarrow \sqrt{[vv]}$$

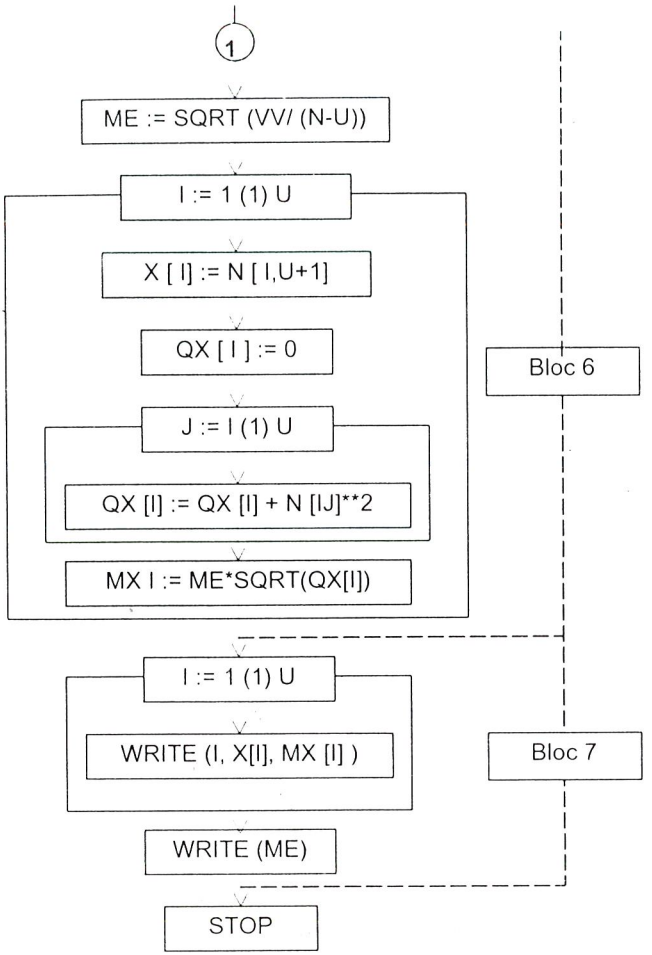
Vì vậy trong Bloc 3 chỉ thực hiện u biến đổi.



Hình 2.3.1. Sơ đồ thuật toán Banaxiêvich


START
READ (N,U)
I := 1 (1)U+1
J = I (1) U+1
N (I J) := 0
Bloc 1
K=1 (1) N
I := 1(1) U+1
READ A([I])
I := 1 (1)U+1
J = I (1) U+1
N[IJ] := N[IJ] + A[I] * A[J]
Bloc 2
K=1 (1) U
N[KK] := 1 / SQRT (N[KK])
1
2
3


1
2
3
J := K + 1 (1) U + 1
N[KJ] := N[KJ] * N[KK])
I := K + 1(1) U+1
J := I (1) U+1
N [IJ] := N [IJ] – N [IK]* N [KJ]
Bloc 3
K := U + 1
VV := N[KK]
N(KK) := 1
Bloc 4
I := 1 (1) U
J = I (1) U+1
S := 0
K := I (1) J - 1
S := S + N[JK]*N[IK]
N [IJ] := -S*N [JJ]
Bloc 5
1



Hình 2.3.2. Sơ đồ cấu trúc thuật toán Banaxiêvich

Trong Bloc 5 chu kỳ i với số vòng lặp u, vì khi I = u + 1 chỉ tính cho thành phần cuối cùng, mà trong Bloc 4 thay bằng 1.

Trong sơ đồ tính không tính đến khả năng ngừng tính trong máy. Việc tính toán có thể ngừng, nếu một vài thành phần định thức con Δ_i thuộc ma trận $\overline{N}$, nhận giá trị $\Delta_i \leq 0$.

Trường hợp $\Delta_i < 0$ cần loại ra, vì ma trận hệ số phương trình chuẩn được tính theo công thức

$$N = A^* A,$$

$$(u,u)\ (u,n)\ (n,u)$$

N luôn luôn không âm, tức $\Delta_i \geq 0 \quad i = \overline{1,u}$.

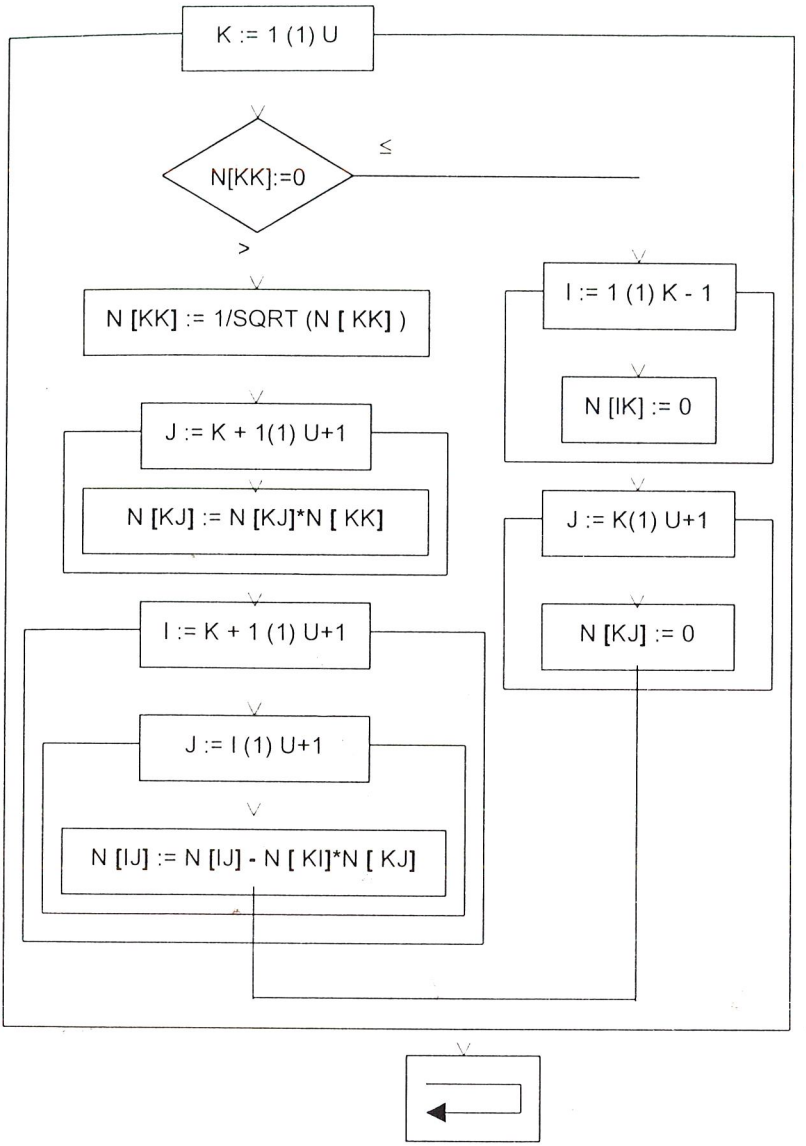
Có khả năng trong A có phụ thuộc tuyến tính giữa các cột của A, với i nào đó ($i = \overline{1,u}$) ta có $\Delta_i = 0$. Trong trường hợp đó nhận được $R_{ii} = 0$ và tương ứng $1/R_{ii} = R^{ii}$ trở thành không xác định. Quá trình tính toán tất nhiên bị dừng lại. Từ đó có thể tìm nguyên nhân để loại bỏ. Trong trường hợp này việc lật ngược ma trận có thể thay thế, ví dụ $R_{ii} = 0$ đặt $R^{ii} = 0$.

Sơ đồ tính toán trong Bloc 3 có thay đổi khi xử lý vấn đề này (hình 2.3.3).

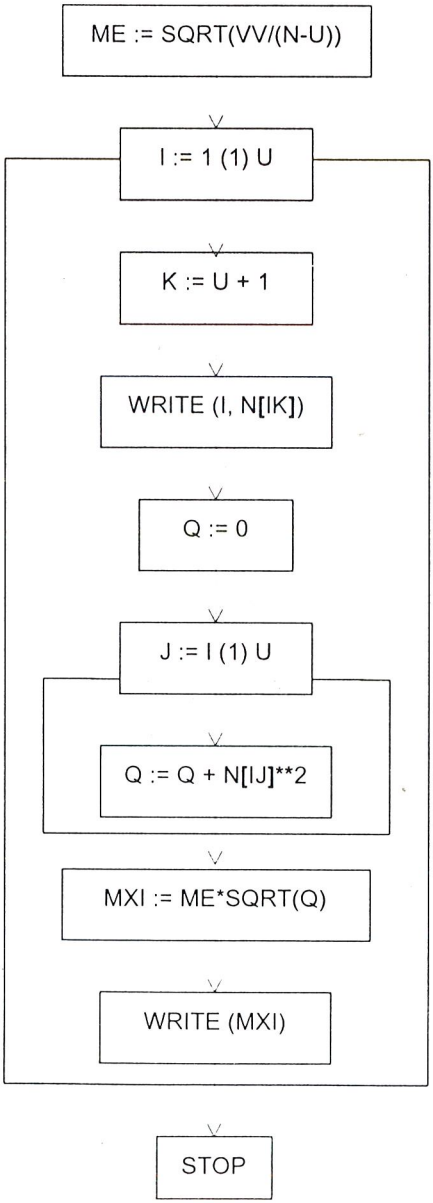
Trong Bloc 3, đưa vào phép thử logic, kiểm tra điều kiện $N[kk] > 0$, so với một số dương nhỏ (ví dụ 10^{-5}) đáng lẽ là 0, bởi vì đúng số không của N[kk] có thể không có do có quá trình làm tròn. Bloc 5 không đổi, thành phần trên đường chéo của R^{-1}, chứa $R^{ii} = 1/R_{ii}$ cũng đã tính từ trong bloc 3.

Với sự thay đổi sơ đồ tính toán như thế, các ẩn số x_i sẽ nhận giá trị 0, sai số trung phương cũng nhận là 0. Điều đó để loại ẩn số đó ra khỏi bình sai.

Cuối cùng ta cũng chú ý rằng sơ đồ tính toán hình 2.3.2 của thuật toán Banaxiêvich có thể đơn giản hơn, ví dụ bloc 6 và Bloc7 có thể kết nối làm một, Cùng lúc đó có thể nhận X, QX, MX. Điều này được trình bày ở hình 2.3.4.


K := 1 (1) U
N[KK]:=0
≤
>
N [KK] := 1/SQRT (N [KK])
J := K + 1(1) U+1
N [KJ] := N [KJ]*N [KK]
I := K + 1 (1) U+1
J := I (1) U+1
N [IJ] := N [IJ] - N [KI]*N [KJ]
I := 1 (1) K - 1
N [IK] := 0
J := K(1) U+1
N [KJ] := 0

Hình 2.3.3


ME := SQRT(VV/(N-U))
I := 1 (1) U
K := U + 1
WRITE (I, N[IK])
Q := 0
J := I (1) U
Q := Q + N[IJ]**2
MXI := ME*SQRT(Q)
WRITE (MXI)
STOP

Hình 2.3.4

2.3.1.3. Phương pháp trực giao tuần tự hay phương pháp trực tiếp để giải bài toán bình sai gián tiếp

Phương pháp mà ta đã xem xét trong tiết này dựa trên nguyên lý biến đổi trực giao tuần tự ma trận phương trình hiệu chỉnh. Về bản chất tương tự như phương pháp Bols trong trường hợp giải một hệ bình sai điều kiện. Ở đây bỏ qua thành lập ma trận hệ số lập phương trình chuẩn. Việc tính số cải chính độc lập với ẩn số. Vì vậy gọi là phương pháp trực tiếp.

Như tiết trước, ta xuất phát từ phương trình hiệu chỉnh chuẩn hoá (từ các phương trình hiệu chỉnh đã chuyển về trọng số đơn vị), dạng ma trận

$$\underset{(n,1)}{V} = \underset{(n,u)}{A}\ \underset{(u,1)}{X} + \underset{(n,1)}{F}. \qquad (2.3.46)$$

Với ma trận hệ số trọng số của cột F ta có

$$Q_F = E \qquad (2.3.47)$$

Phương trình (2.3.46) giải với điều kiện

$$V^*V = \min \qquad (2.3.48)$$

Và như ở điều kiện trước đã rõ, tương đồng với điều kiện

$$A^* V = 0 \qquad (2.3.49)$$

Từ (2.3.46) sau khi nhân bên trái với A* và để ý đến (2.3.49) ta có

$$(A^*A)X + A^* F = 0, \qquad (2.3.50)$$

và như ở điểm trước đã rõ, là dạng ma trận của hệ phương trình chuẩn cho các ẩn, lần này lời giải ở dạng

$$X = -(A^* A)^{-1} A^*F . \qquad (2.3.51)$$

Nhưng (xem phụ lục IV)

$$(A^*A)^{-1}A^* = A^{-1}_{tr.ch}. \quad (2.3.52)$$

($A_{tr.ch}$ gọi là trái chính).

Vì vậy:

$$X = -A^{-1}_{tr.ch} F. \quad (2.3.53)$$

Phương trình (2.3.53) nằm trong cơ sở của phương pháp trực tiếp về bài toán bình sai.

Khi thay (2.3.53) vào (2.3.46) ta nhận được

$$V = (E - A A^{1}_{tr.ch}) F \quad (2.3.54)$$

Với ma trận hệ số trọng số cột X với để ý tới (2.3.47) và (2.3.53) ta sẽ có:

$$Q_X = A^{-1}_{tr.ch} (A^{-1}_{tr.ch})^* = A^{-1}_{tr.ch} [(A^*A)^{-1} A^*]^* =$$
$$= A^{-1}_{tr.ch} A (A^*A)^{-1} = (A^*A)^{-1} \quad (2.3.55)$$

Ta nhận được biểu thức ma trận hệ số trọng số của các ẩn số, như ta đã xem xét ở phương pháp không trực tiếp / so sánh với (2.3.28)/.

Ta sẽ xác định ma trận hệ số trọng số của cột $\bar{l} = l + v$ /tức của trị bình sai của các đại lượng đo/. Với mục đích này trong (2.3.54) biểu diễn F dưới dạng

$$F = l_0 - l \quad (2.3.56)$$

ở đây l_0 là cột trị gần đúng của đại lượng tham gia bình sai, còn l là cột trị đo.

Ta có

$$Q_F = Q_l = F \quad (2.3.57)$$

ở đây ta dẫn từ (2.3.47).

Đặt (2.3.56) vào (2.3.54) ta nhận được

$$V = (E - AA^{-1}_{tr.ch})(l_0 - l) =$$
$$= -l + AA^{-1}_{tr.ch}l + \text{Các số hạng hằng số.}$$

Hay cũng là một:

$$\bar{l} = l + V = AA^{-1}_{tr.ch} l + \text{Các số hạng hằng số.} \quad (2.3.58)$$

Từ (2.3.58) với chú ý đến (2.3.57) ta nhận được

$$Q_l = (AA^{-1}_{tr.ch})(AA^{-1}_{tr.ch})^* = AA^{-1}_{tr.ch}, \quad (2.3.59)$$

Ở đây ta đã sử dụng tính đối xứng và đồng nhất của ma trận $AA^{-1}_{tr.ch}$ (xem phụ lục IV)

Để có lời giải bằng số của bài toán này ta giả thiết rằng $\underset{(n,u)}{A}$ là chịu phân tích trực giao (xem phụ lục II), tức

$$\underset{(n,u)}{A} = \underset{(n,u)}{U_h} \quad \underset{(u,u)}{T_h} \ (n > u) \quad (2.3.60)$$

Ở đây U_h là ma trận thuộc dạng A với trực giao gữa các cột, còn T_h là ma trận tam giác trên.

Từ tính chất trực giao của U_h có

$$U_h^* U_h = E. \quad (2.3.61)$$

Đặt (2.3.60) vào công thức (2.3.53), (2.3.54), (2.3.55) và (2.3.59) và để ý rằng

$$AA^{-1}_{tr.ch} = U_h U_h^*$$

$$A^{-1}_{tr.ch} = T^{-1}_h U_h^*, \quad (2.3.62)$$

ta nhận được

$$X = -T^{-1}_h U_h^* F; \quad (2.3.63)$$

$$V = (E - U_h U_h^*)F; \quad (2.3.64)$$

$$Q_x = (T_h T_h^*)^{-1} = T_h^{*-1} T_h; \quad (2.3.65)$$

$$Q_l = U_h U_h^*. \quad (2.3.66)$$

Ta đưa vào cột

$$T_F = U_h^* F. \quad (2.3.67)$$

Nó có đặc tính là ma trân hệ số trọng số trùng với đơn vị . Thật vậy, từ (2.3.67) ta tính được

$$Q_{TF} = U_h^* Q_F U_h = U_h^* U_h = E \qquad (2.3.68)$$

ở đây ta đã sử dụng (2.3.57) và (2.3.61).

Với để ý đến (2.3.67), công thức (2.3.63) và (2.3.64) thay đổi vào dạng

$$X = -T^{-1}_h T_F; \qquad (2.3.69)$$

$$V = F - U_h T_F \qquad (2.3.70)$$

Cách đặt như thế công thức (2.3.60) và (2.3.67), thấy rằng T_F và T_h nhận được theo cách tương tự. Thật vậy thấy hợp lý liên kết

$$[AF] = U_h[T_h\ T_F]. \qquad (2.3.71)$$

Với phân tích trực giao của ma trận [AF] có thể viết

$$[AF] = \left[U_h, \frac{1}{\sqrt{V^* V}} V\right] \begin{bmatrix} T_h & T_F \\ . & \sqrt{V^* V} \end{bmatrix}. \qquad (2.3.72)$$

Phân tích (2.3.72) chứng tỏ rằng, khi sử dụng quan hệ

$$U_h^* V = 0 \qquad (2.3.73)$$

mà quan hệ này suy trực tiếp từ (2.3.70).

Thật vậy, nhân bên trái (2.3.70) với U_h^* ta nhận được khi biết qua (2.3.67).

$U_h^* V = U_h^* F - T_h = T_F - T_F = 0$; điều ta muốn chứng tỏ.

Nếu bước cuối cùng của quá trình trực giao [AF] không thực hiện, tức không khai căn được đại lượng V*V và không chuẩn được cột V, thì phía phải (2.3.72) sẽ xuất hiện ở dạng

$$[U_h V] \begin{bmatrix} T_h & T_F \\ . & V^* V \end{bmatrix}. \qquad (2.3.74)$$

Nói cách khác, nếu phân tích trực giao [AF] chỉ có u biến đổi trực giao thay cho u + 1, ta sẽ nhận phân tích (2.3.74) thay cho (2.3.72).

Với chúng ta phân tích (2.3.74) thích hợp hơn.

Với công tác với máy tính, $[U_h V]$ viết ngay trên chỗ của [AF].

Để tính ẩn số ta lật ngược ma trận

$$\tilde{\tilde{T}}_h = \begin{bmatrix} T_h & T_F \\ . & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.3.75)$$

nhận được

$$\tilde{\tilde{T}}_h = \begin{bmatrix} T_h^{-1} & X \\ . & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.3.76)$$

Kết quả (2.3.76) suy trực tiếp từ quan hệ giữa phương pháp gián tiếp và trực tiếp. Có thể chứng minh khi đặt

$$T_h \equiv R;\ T_F \equiv \rho \qquad (2.3.77)$$

Tính hệ số trọng số của ẩn số và trị bình sai theo các công thức

$$(Q_x)_{ii} = \frac{1}{P_{Xi}} = \sum_{k=i}^{u} (T^{ik})^2; \qquad (2.3.78)$$

$$(Q_l)_{jj} = \frac{1}{P_{lj}} = \sum_{k=1}^{u} u_{jk}^2 . \qquad (2.3.79)$$

$$(i = \overline{1,u};\ j = \overline{1,n});$$

Theo công thức (2.3.78) T^{ik} là các thành phần của ma trận T_h^{-1}, còn trong (2.3.79) U_{jk} là thành phần ma trận U_h.

Cuối cùng biểu thức V*V nhận được

$$V^*V = F^*(E - U_h U^*_h)F = F^*V =$$
$$= F^*F - (U_h{}^*F)^*(U_h{}^*F) =$$
$$= F^*F - T^*_F T_F ,$$

ở đây ta tính đến đồng nhất $E - U_h U^*_h$.

Vì vậy

$$V^*V = V^*F = F^*F - T^*_F T_F . \qquad (2.3.80)$$

Công thức (2.3.80) có thể dùng để kiểm tra tính toán bình sai (có giữ điều kiện V*V = min hay không).

Thuật toán vừa trình bày thích hợp với toàn bộ ma trận [AF] đưa vào bộ nhớ của máy tính và ta muốn nhận bức tranh đầy đủ về độ chính xác của trị bình sai.

Trực giao liên tiếp của ma trận $\overline{A}$:

$$\overline{A} = [AF] = \overline{U}_h \overline{T}_h \qquad (2.3.81)$$

thực hiện theo công thức

$$T_{kk} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A^2_{ik.k-1}}$$

$$U_{ik} = A_{ik.k} = A_{ik.k-1} / T_{kk} ,$$

$$T_{kj} = \sum_{i=1}^{n} A_{ik.k} A_{ij.k-1}, \qquad (2.3.82)$$

$$A_{ij.k} = A_{ij.k-1} - A_{ik.k} T_{kj} ,$$

$$k = \overline{1,u} ; i = \overline{1,n} ; j = \overline{k+1,u+1} ;$$

Ở đây T_{kj} là thành phần của ma trận T_h , còn A_{ik} là thành phần của ma trận $\overline{U}_h$.

Như trên đã rõ, với sử dụng các công thức ở (2.3.82) thành phần cuối cùng của $\overline{T}_h$ sẽ là V*V.

Ma trận $\overline{T}_h$ vì là tam giác trên, có thể ghi ở dạng mảng một chiều. Vị trí của T_{kj} xác định tương tự như ở thuật toán Banaxiêvich (xem tiết 2.3.1.2).

2.3.1.4. Sơ đồ khối và sơ đồ tính toán của phương pháp trực tiếp của bình sai gián tiếp

Ở đây thông tin ban đầu là hệ số và số hạng tự do của phương trình hiệu chỉnh đã đưa về trọng số đơn vị. Ma trận $[\hat{A}\hat{F}]$ viết theo dòng ở mảng hai chiều có tên là A. Hệ số trước ẩn số thứ i trong phương trình thứ j nhận vị trí [j, i], còn số hạng tự do ở [j, u + 1]. Mảng hai chiều A là xuất phát cho việc giải bài toán và việc đầu tiên là đưa vào bộ nhớ của máy tính.

Ma trận $\overline{T}$ ghi vào mảng một chiều T với độ dài $\frac{(u+1)(u+2)}{2}$, ở đây tương tự như thuật toán Banaxiêvich vị trí thành phần T_{ij} trong mảng T xác định theo công thức

$$IJ = (i-1)(2(u+1) - i)/2+j .$$

Nói cách khác thành phần T_{ij} sắp xếp trong mảng T theo hàng.

Qua biến đổi của mảng này /sau khi thay mảng cuối cùng bằng 1/ theo công thức

$$T^{ii} = 1/T_{ii} \qquad (i = \overline{1,u}) :$$

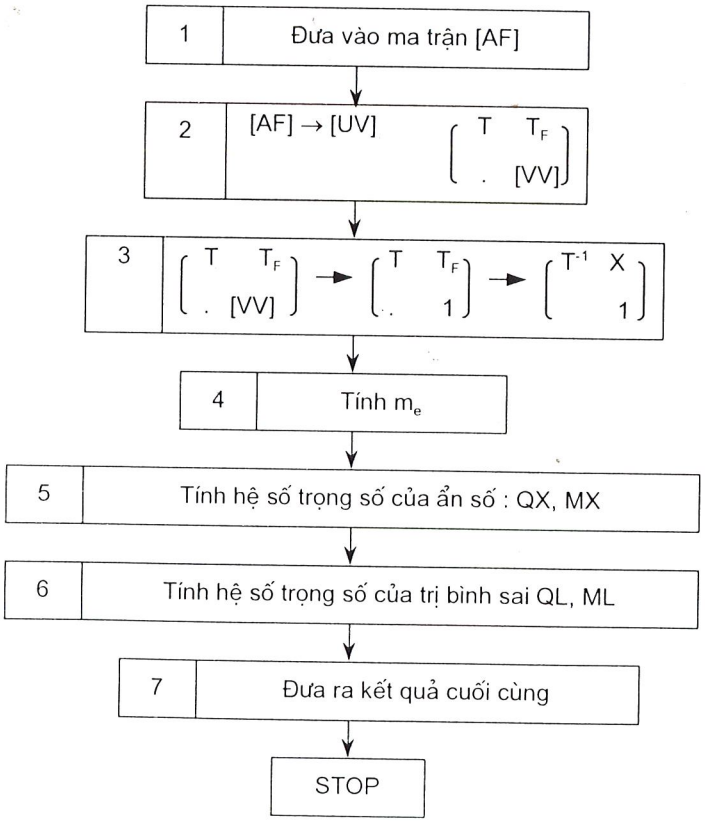
$$T^{ii} = -T^{jj}\sum_{K=1}^{J-1} T_{kj}T^{ik} \qquad (i, j = \overline{1,u+1} ; i<j) \qquad (2.3.83)$$

nhận được các thành phần T^{ij} của ma trận

$$\tilde{\overline{T}} = \begin{bmatrix} T^{-1} & X \\ . & 1 \end{bmatrix}.$$

Trong sơ đồ sử dụng ba mảng một chiều X, QX, MX với độ dài u. Trong đó ghi ẩn số tương ứng, hệ số trọng số và sai số trung phương của ẩn số.

Sử dụng thêm các mảng một chiều V, QL, ML với độ dài n trong đó ghi tương ứng hiệu chỉnh, hệ số trọng số và sai số của đại lượng bình sai.



Hình 2.3.5 Sơ đồ giải bài toán bình sai gián tiếp theo phương pháp trực giao tuần tự.

Trong sơ đồ cấu trúc có thay đổi nhỏ của thuật toán để tránh thực hiện một vài tính toán thừa. Ví dụ thành phần T_{ii} không ghi mà tính và ghi cùng chỗ của thành phần T^{ii} của ma trận $\overline{T}^{-1}$. Tương tự, rút ngắn được một số tính toán thừa, cũng như vậy trong chương trình.

Sơ đồ khối của thuật toán trình bày ở hình 2.3.5, còn sơ đồ ở hình 2.3.6.

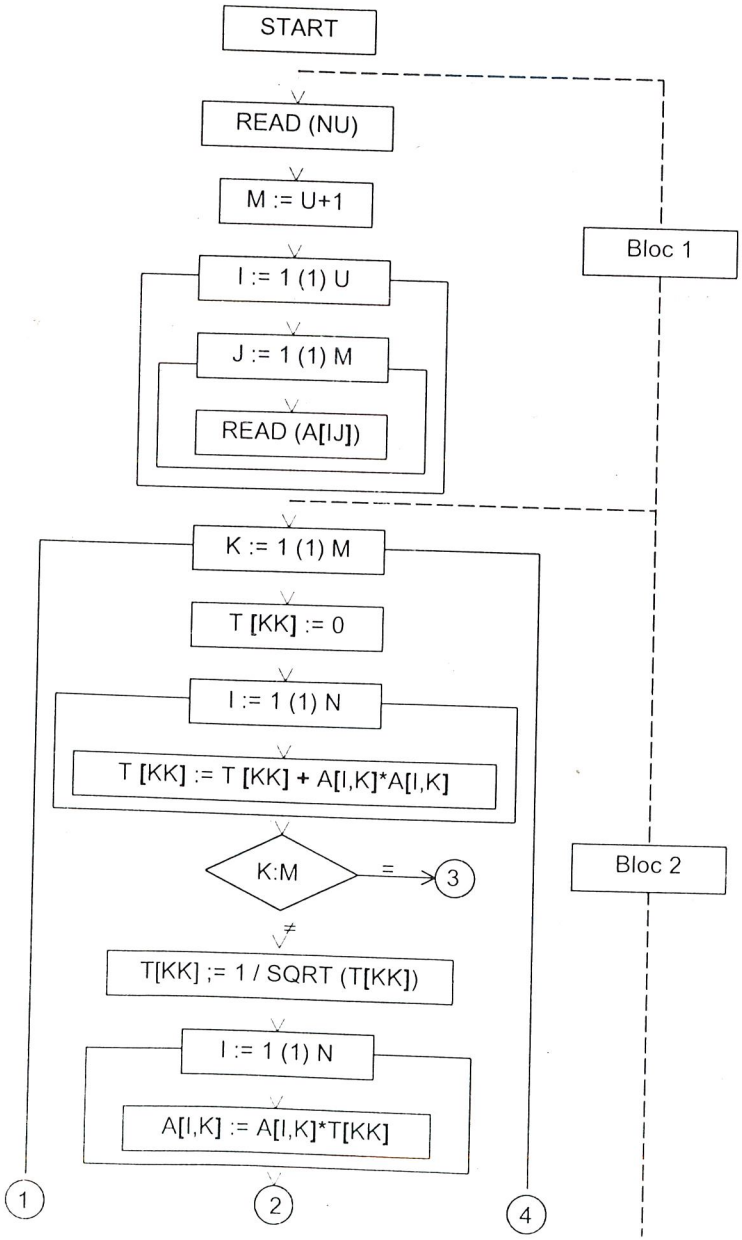
Trong sơ đồ tính giá trị dạng T[ij] được gán chỉ ở thành phần T_{ij}, tương tự là T^{ij} mà chỗ của chúng được sắp xếp theo mảng một chiều T và được tính:

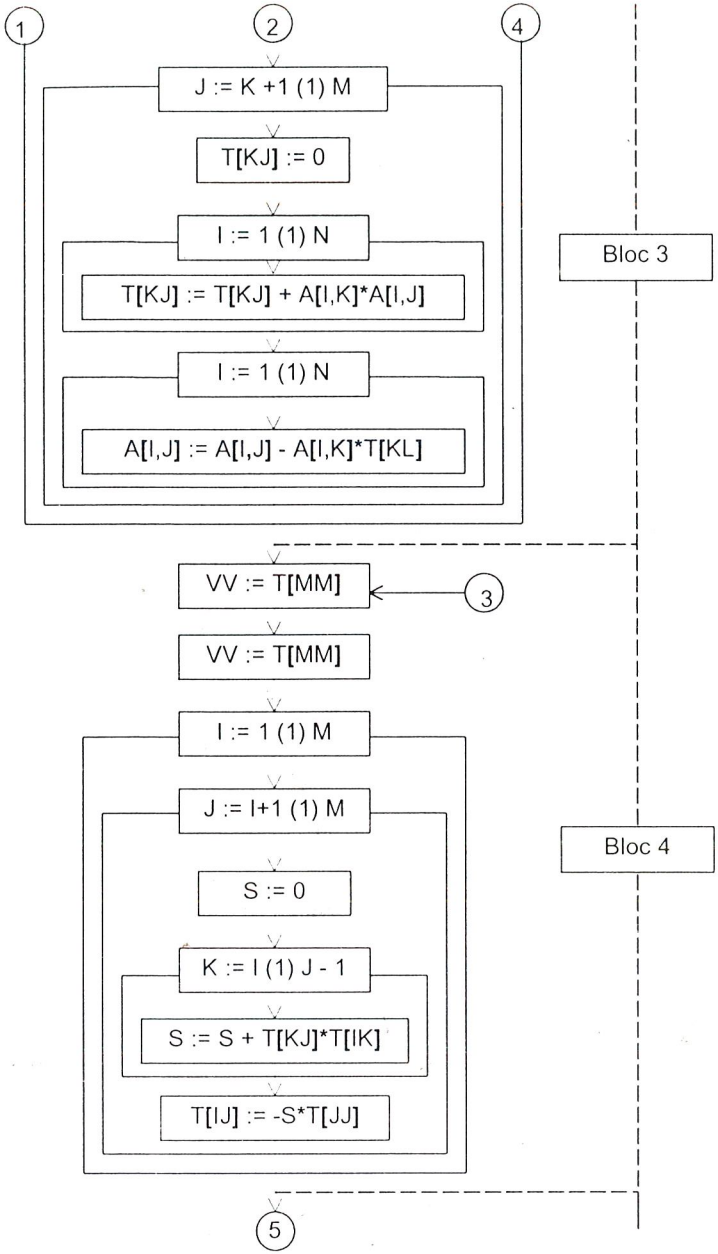
$$ij = (i-1)(2(u+1) - i)/2+j ;$$

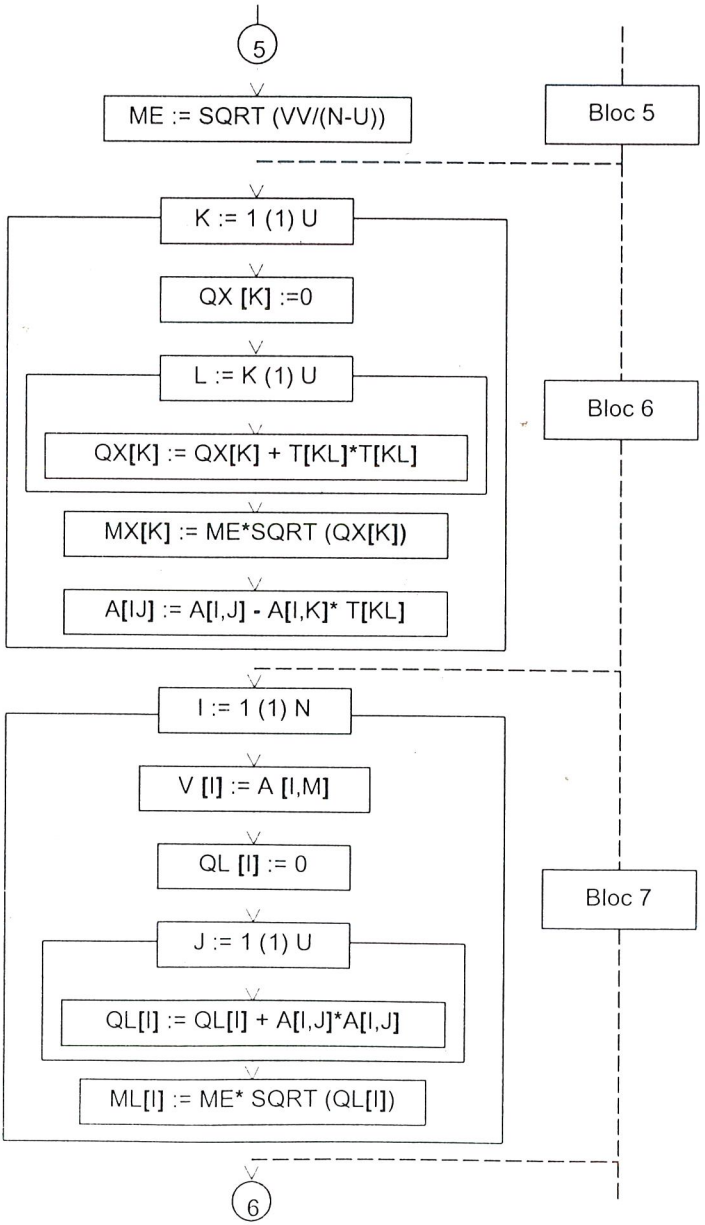
Tương tự như thuật toán Banaxiêvich ở đây bloc 7 có thể xếp vào bloc 5 và 6, cùng lúc cũng có thể không dùng để các mảng X, QX, MX, V, QL, ML.

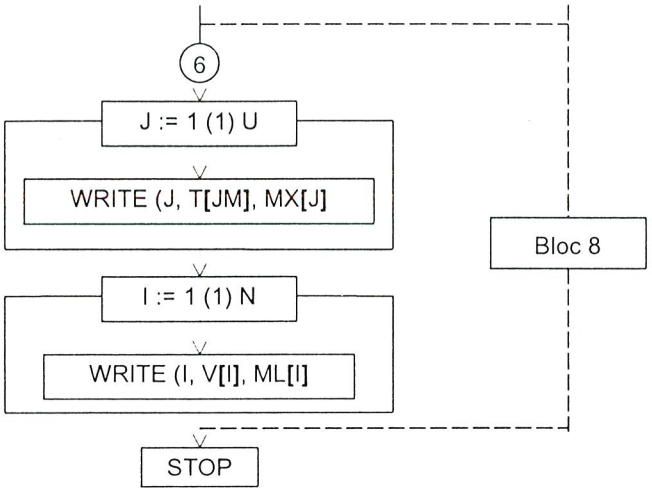
Trong một vài trường hợp bình sai gián tiếp có mục đích tính số hiệu chỉnh mà không cần thiết tính ẩn số. Ở đây việc ghi ma trận $\overline{T}$ sẽ là thừa. Thành phần của ma trận đóng vai trò trong quá trình biến đổi và tất nhiên cần phải tính, nhưng sau khi sử dụng chúng rồi thì có thể giải phóng khỏi bộ nhớ, điều đó có thể thực hiện được khi sử dụng một ô trung gian, ví dụ có tên T chẳng hạn. Nhưng điều đó làm thay đổi sơ đồ tính toán: bloc 2 thay đổi cơ bản, nhưng bloc 3 và 5 cũng như phần thứ hai của bloc 7 không thay đổi. Trong hình 2.3.7 trình bày thay đổi sơ đồ trong bloc 2.

Nếu các trị đo gián tiếp với độ chính xác khác nhau và sai số trung phương là m_j, phương trình sai số hiệu chỉnh cần nhân với $\sqrt{P_i}$ hay chia cho m_j, tức làm việc với hiệu chỉnh hoá.


START
READ (NU)
M := U+1
Bloc 1
I := 1 (1) U
J := 1 (1) M
READ (A[IJ])
K := 1 (1) M
T [KK] := 0
I := 1 (1) N
T [KK] := T [KK] + A[I,K]*A[I,K]
K:M
=
3
Bloc 2
≠
T[KK] ;= 1 / SQRT (T[KK])
I := 1 (1) N
A[I,K] := A[I,K]*T[KK]
1
2
4


1
2
4
J := K +1 (1) M
T[KJ] := 0
I := 1 (1) N
T[KJ] := T[KJ] + A[I,K]*A[I,J]
I := 1 (1) N
A[I,J] := A[I,J] - A[I,K]*T[KL]
Bloc 3
VV := T[MM]
3
VV := T[MM]
I := 1 (1) M
J := I+1 (1) M
S := 0
K := I (1) J - 1
S := S + T[KJ]*T[IK]
T[IJ] := -S*T[JJ]
Bloc 4
5


5
ME := SQRT (VV/(N-U))
Bloc 5
K := 1 (1) U
QX [K] :=0
L := K (1) U
Bloc 6
QX[K] := QX[K] + T[KL]*T[KL]
MX[K] := ME*SQRT (QX[K])
A[IJ] := A[I,J] - A[I,K]* T[KL]
I := 1 (1) N
V [I] := A [I,M]
QL [I] := 0
Bloc 7
J := 1 (1) U
QL[I] := QL[I] + A[I,J]*A[I,J]
ML[I] := ME* SQRT (QL[I])
6



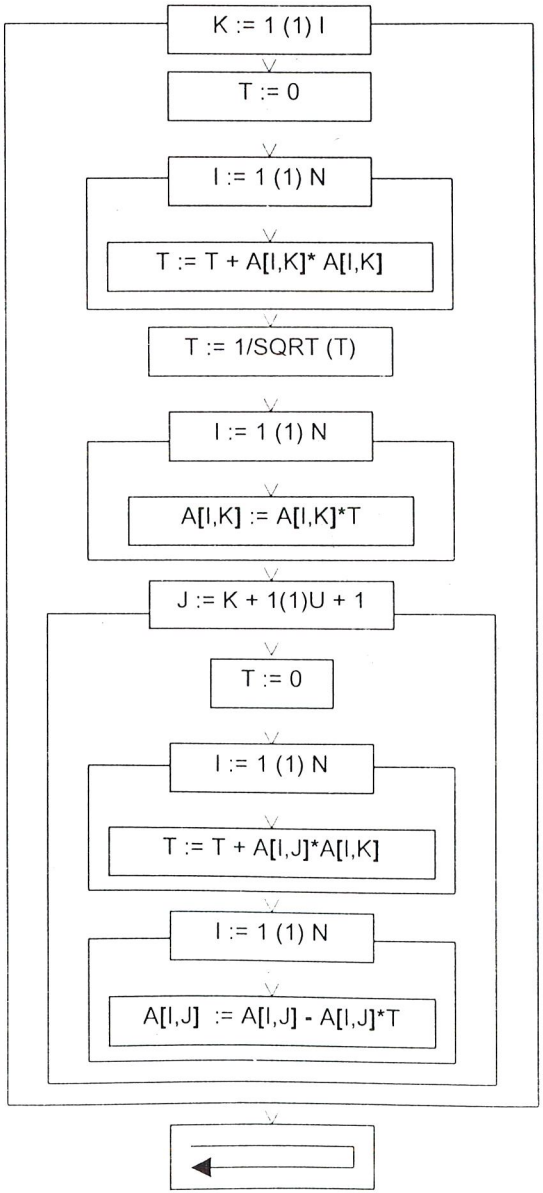
Hình 2.3.6: **Sơ đồ cấu trúc của chương trình giải bài toán bình sai gián tiếp theo phương pháp trực giao tuần tự**

Ở đây, như ở thuật toán Banaxiêvich, quá trình biến đổi (trực giao) có thể bị gián đoạn nếu ma trận hệ số phương trình hiệu chỉnh $\hat{A}$ suy biến; tức giữa các cột có sự phụ thuộc tuyến tính. Nếu ở k cột của $\hat{A}_k$ tuyến tính với một cột trước đó $\hat{A}_j$/j = 1,2,...,k-1/, thì $T_{kk} = 0$. Vì vậy đại lượng $1/\sqrt{T_{kk}}$ trở lên không xác định, quá trình tính toán bị dừng lại. Để đi đến lời gải, cần sơ bộ loại cột $\hat{A}_k$ khỏi ma trận $\hat{A}$. Điều đó có thể đạt được theo cách tương tự như ở thuật toán Banaxiêvich. Nhằm đạt mục đích này ở toán tử

$$T(kk):= \frac{1}{T(KK)}$$

sẽ thay bằng: Nếu $T(KK) \leq 0$ thì thực hiện $T(KK):= 0$

ngược lại $T(KK):= \dfrac{1}{\sqrt{T(KK)}}$.


K := 1 (1) I
T := 0
I := 1 (1) N
T := T + A[I,K]* A[I,K]
T := 1/SQRT (T)
I := 1 (1) N
A[I,K] := A[I,K]*T
J := K + 1(1)U + 1
T := 0
I := 1 (1) N
T := T + A[I,J]*A[I,K]
I := 1 (1) N
A[I,J] := A[I,J] - A[I,J]*T

Hình 2.3.7

Như vậy suy biến của k cột của $\overline{U}_{hk}$ sẽ được vô hiệu hoá, tức U_{ik} $(i = \overline{1,n})$, sẽ đặt không cho k hàng của $\overline{T}$, tức $T_{kj} = 0$ $(j = \overline{k,u+1})$. Thay đổi bổ sung trong bloc 3 không đặt ra, vì phép chia đã loại khỏi. Kết quả bổ sung này của thuật toán ẩn số x_k, tương ứng với vị trí trong $\hat{A}_k$ làm nảy sinh phụ thuộc tuyến tính, sẽ nhận giá trị 0, Tương tự như vậy sai số trung phương, hệ số trọng số nhận giá trị 0. Cũng có thể sử dụng ký hiệu để nói sự phụ thuộc tuyến tính tương ứng theo các vị trí đó.

2.3.1.5. Vị trí của phương pháp trực tiếp, gián tiếp và giải bài toán bình sai gián tiếp

Ta đã xem hai thuật toán giải bài toán bình sai gián tiếp, ở đây có sử dụng phương pháp khử. Mặc dù, ở đây phân biệt cách tính toán và tổ chức bộ nhớ trong máy tính. Nhìn qua ta có nhận xét phương pháp trực tiếp cần có bộ nhớ nhiều hơn. Ở đây tất cả phương trình hệ số hiệu chỉnh xuất phát được ghi giữ từ đầu đến cuối. Thay vào đó cho ta bức tranh bình sai tương đối hoàn chỉnh, đặc biệt tính sai số trung phương của trị bình sai. Phương pháp trực tiếp có thể sử dụng trong trường hợp bình sai lưới trắc địa nhỏ và cần đánh giá độ chính xác của mỗi một trị bình sai. Mặt khác sẽ thấy ở điểm 2.6.2.2 phương pháp trực tiếp rất đơn giản và nhẹ nhàng trên phương diện lập trình.

Thuật toán Banaxiêvich cũng cho một sơ đồ tính toán nhẹ nhàng, nó cho một dãy biến đổi trên mảng cùng ma trận một chiều, từ $\overline{N}, \overline{R}, \widetilde{\overline{R}}, \widetilde{\overline{R}}^{-1}$. Thuật toán cũng thuận tiện cho quá trình xử lý số liệu đo. Mỗi một phương pháp đều có mặt ưu mặt nhược của nó. Vì vậy việc vận dụng cả hai phương pháp tuỳ điều kiện mới cho hiệu quả mong muốn.

2.4. THÀNH LẬP HỆ THỐNG PHƯƠNG TRÌNH GỐC

Để có thể sử dụng ở tiết 2.3 thuật toán giải bình sai gián tiếp cần phải có phương trình hiệu chỉnh cho mỗi đại lượng đo. Để có hình ảnh rõ ràng về giải quyết vấn đề bình sai ta quay về ví dụ kinh điển. Ta dừng ở bài toán giải theo thuật toán Banaxiêvich. Thuật toán này dùng ngay sau khi quá trình lập phương trình chuẩn xong. Vì cùng quá trình thành lập phương trình hiệu chỉnh sẽ tính tham gia dồn vào hệ phương trình chuẩn xong chung, và như thế thành lập phương trình chuẩn liên kết trong một bloc. Thuật toán trình bày ở đây mô tả một mô hình của quá trình tính toán quen thuộc để thành lập phương trình hiệu chỉnh và phương trình chuẩn với mạng lưới góc cạnh. Ở đây đưa vào một khái niệm - số máy của điểm, thiếu nó không thể thành lập phương trình hiệu chỉnh. Khi thành lập một phương trình con để tìm thông tin cho điểm theo tên của điểm, số máy của tất cả các điểm đã có toạ độ là 0, còn điểm cần xác định là các số mà số đó chỉ vị trí của điểm tương ứng trong danh sách chung của các điểm cần xác định (mảng NQ và NP). Nói cách khác số máy MN của một điểm xác định sẽ là số thuộc khoảng đóng [1, N2-N3], ở đây N2 và N3 là độ dồn NQ và NP. Số máy của điểm đã cho (bằng 0) ta dùng như là dấu hiệu rằng điểm đã có, không phải tính. Ta trình bày cách sử dụng số máy của điểm. Như đã biết, phương trình hiệu chỉnh của hướng, đo từ điểm i đến điểm j là

$$v_{ij} = -d0_i + a_{ij}dx_i + b_{ij}dy_i - a_{ij}dx_j - b_{ij}dy_j + f_{ij} . \qquad (2.4.1)$$

ở đây

$$a_{ij} = \frac{y_j^0 - y_i^0}{S_{ij}^{0\,2}}\rho'' \ , \ b_{ij} = -\frac{x_j^0 - x_i^0}{S_{ij}^{0\,2}}\rho'' . \qquad (2.4.1.a)$$

$$f_{ij} = \alpha^0_{ij} - R^1_{ij} - 0^0_i : \qquad (2.4.1,b)$$

(dx_i, dy_i) và (dx_j, dy_j) là hiệu chỉnh tọa độ gần đúng (x_i^0, y_i^0) và (x_j^0, y_j^0) của điểm i và j;

$d0_i$ là hiệu chỉnh trị gần đúng của góc hướng 0_j^0 cho trạm i;

α_{ij}^0 và S_{ij}^0 là góc phương vị và độ dài, được tính về tọa độ gần đúng của điểm i và j;

R^1_{ij} là hướng đo;

Số hạng trị đo f_{ij} tính ở giây (nhiều nước tính ở centygrad); tức trong cùng một đơn vị, mà được thể hiện ở radian (ρ").

Nếu điểm i đã cho, các số hạng với dx_i và dy_i; trong phương trình sẽ không có, tương tự, nếu điểm j đã cho, sẽ không có các số hạng với dx_j và dy_j. Nếu hai điểm đều đã cho (i và j) trong phương trình V_{ij} còn lại ẩn số chỉ với $d0_i$.

Với làm việc bằng máy tính cũ cầm tay trước đây ẩn số định hướng loại thông thường nhất theo phương pháp Shraiber. Phương pháp này ưu việt hơn phương pháp Gauss, vì cho phép tạo hệ phương trình tương đương của các hiệu chỉnh, trong hệ đó với các hướng đo ngắm đi về hai chiều được liên kết. Với công việc bằng máy tính (hiện nay) ứng dụng phương pháp Shraiber một mặt khó khăn hơn, mặt khác không hiệu quả. Hơn nữa phương pháp Shraiber cần sử dụng phương trình với trọng số âm - phương trình tổng, tất nhiên làm nặng chương trình tính, vì vậy ta sử dụng phương pháp Gauss.

Phương trình hiệu chỉnh đo hướng ở một trạm biểu diễn ở dạng

$$V_{ij} = -d0_i + A^{(i)}_{j1}x_1 + A^{(i)}_{j2}x_2 + \cdots + A^{(i)}_{ju}x_u + f_{ij}. \qquad (2.4.2)$$

$$(j = \overline{1, n_i})$$

và tất cả với trọng số P_i . Trong công thức (2.4.2) n_i là số hướng ngắm tại trạm i; x_1, x_2, ..., x_u là số cải chính cho tọa độ gần đúng của tất cả các điểm xác định với tổng số là N2 + N3, vì vậy u = 2(N2 + N3). Trong các hệ số $A^{(i)}_{jk}$ ($k = \overline{1,u}$) nhiều nhất có 4 số khác không (xem phương trình (2.4.1)).

Phương pháp Gauss sơ bộ loại ẩn định hướng dẫn đến phương trình sau:

$$V_{ij} = A'^{(i)}_{j1} + A'^{(i)}_{j2}\, x_2 + \cdots + A'^{(i)}_{ju}\, x_u + f'_{ij}, \qquad (2.4.3)$$

ở đây

$$A'^{(i)}_{jq} = A^{(i)}_{jq} - \frac{\sum_{k=1}^{n_i} A^{(i)}_{kq}}{n_i} \qquad (2.4.3,a)$$

$$f'_{ij} = f_{ij} - \frac{\sum_{k=1}^{n_i} f_{ik}}{n_i} \qquad (2.4.3,b)$$

với

$$j = \overline{1,n_i}\ ,\quad q = \overline{1,u}\ .$$

Trọng số của các phương trình dạng (2.4.3) vẫn giữ P_i.

Từ trên thấy rằng để nhận phép biến đổi theo Gauss phương trình hiệu chỉnh có thể xuất phát không phải từ (2.4.2), mà từ phương trình hiệu chỉnh mới

$$\delta_{ij} = A^{(i)}_{j1} x_1 + A^{(i)}_{j2} x_2 + \ldots + A^{(i)}_{ju} x_u + f_{ij}, \qquad (2.4.4)$$

$$(j = \overline{1,n_i})$$

mà sau khi biến đổi chúng theo công thức (2.4.3,a và b) sẽ dẫn đến cho ta hệ (2.4.3).

Bây giờ đã có thể chỉ ra sử dụng số máy như thế nào đối với các điểm.

Giả sử: số máy của trạm (i) là MNST,

số máy của điểm ngắm (j) là MNNT,

trong trường hợp này thành lập phương trình (2.4.4) sẽ có:

$$A_j^{(i)}(2*MNST - 1) = a_{ij} ;$$

$$A_j^{(i)}(2*MNST) = b_{ij} ;$$

$$A_j^{(i)}(2*MNNT - 1) = -a_{ij} ;$$

$$A_j^{(i)}(2*MNNT) = -b_{ij} ;$$

Tất cả các hệ số còn lại của $A_{jk}^{(i)}$ bằng không.

Nếu ta cho các hệ số và số hạng tự do của phương trình (2.4.4) xếp trong mảng một chiều A với độ dài u + 1; khi đó hệ số a_{ij} cần ghi ở vị trí 2*MNST - 1, hệ số b_{ij} ở vị trí 2*MNST, hệ số $-a_{ij}$ ở vị trí 2*MNNT - 1, $-b_{ij}$ ở 2*MNNT, còn số hạng tự do ở vị trí u+1.

Khi xem xét vấn đề bình sai cho tất cả các hướng xuất phát từ một trạm, ta cần thể hiện một bảng chữ nhật (hay một mảng hai chiều) trong đó hàng thứ nhất đưa vào theo cách chỉ dẫn trên hệ số và số hạng tự do của phương trình thứ nhất δ_{i1} , ở hàng thứ hai, hệ số và số hạng tự do của phương trình thứ hai δ_{i2} , v.v.. (xem bảng 2.4.1). Ở hàng cuối cùng bảng này sẽ tính tổng từ các cột dọc để dùng cho biến đổi theo công thức (2.4.3, a và b).

Bảng 2.4.1

j \ q	1	2	...	u	f
1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1u}	f_1
2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2u}	f_2
...	.....				....
n	A_{n1}	A_{n2}	...	A_{nn}	f_n
Σ	$[A]_1$	$[A]_2$	...	$[A]_n$	[f]

Bảng 2.4.1,a

j \ q	1	2	...	u	f
1	A^l_{11}	A^l_{12}	...	A^l_{1u}	f^l_1
2	A^l_{21}	A^l_{22}	...	A^l_{2u}	f^l_2
...	.....				....
n	A^l_{n1}	A^l_{n2}	...	A^l_{nn}	f^l_n
Σ	$[A]_1$	$[A]_2$	...	$[A]_n$	[f]

Trong bảng 2.4.1 và 2.4.1.a chỉ số i bỏ qua.

Sau khi biến đổi bảng 2.4.1 (mảng hai chiều trong máy tính), nội dung của nó sẽ thay đổi như trong bảng 2.4.1,a.

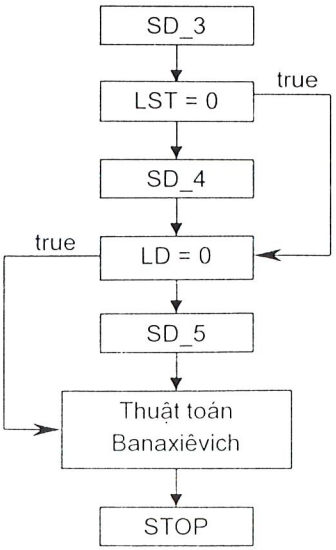
Bây giờ hệ các phương trình tương đương đã nhận được đem đưa về trọng số đơn vị (hiệu chỉnh chuẩn hoá).

Điều này có thể thực hiện được bằng cách chia cho $m_i = 1/\sqrt{P_i}$.

Sau khi bảng 2.4.1 biến đổi mà nội dung của nó tương ứng ở bảng 2.4.1.a. Tiến đến tính dồn vào phương trình chuẩn từ bảng tương ứng. Nhằm mục đích này từ nội dung của ô nhớ thành phần N_{ik} của hệ phương trình chuẩn, thêm vào đại lượng

$$\sum_{j=1}^{n} A'_{ji} A'_{jk} . \qquad (2.4.5)$$

Toàn bộ quá trình tính được mô tả ở sơ đồ SD_4.



Hình 2.4.1

Vì tính dồn vào hệ phương trình chuẩn chung của đại lượng đo độ dài ở sơ đồ SD_5.

Liên hệ qua lại giữa SD_4 và SD_5 được trình bày ở sơ đồ tại hình 2.4.1.

2.4.1. Sơ đồ thành lập hệ phương trình chuẩn trong trường hợp bình sai đo góc (SD_4)

Sơ đồ ở đây là sự tiếp tục của các sơ đồ SD_1, SD_2 và SD_3. Sơ đồ này sử dụng các mảng thông tin được định nghĩa trong tiết 2.1.1 và 2.1.3, và các chương trình con sau:

1. Thu nhận số liệu của điểm theo tên điểm. Nhận tọa độ (XT, YT) của điểm (IME) và số máy (MN). Lời gọi đến chương trình con ví dụ

DANNI(IME, XT, YT, MN)

2. Tính góc phương vị theo các biến: tọa độ của hai điiểm A và B. Lời gọi đến chương trình con biểu trưng:

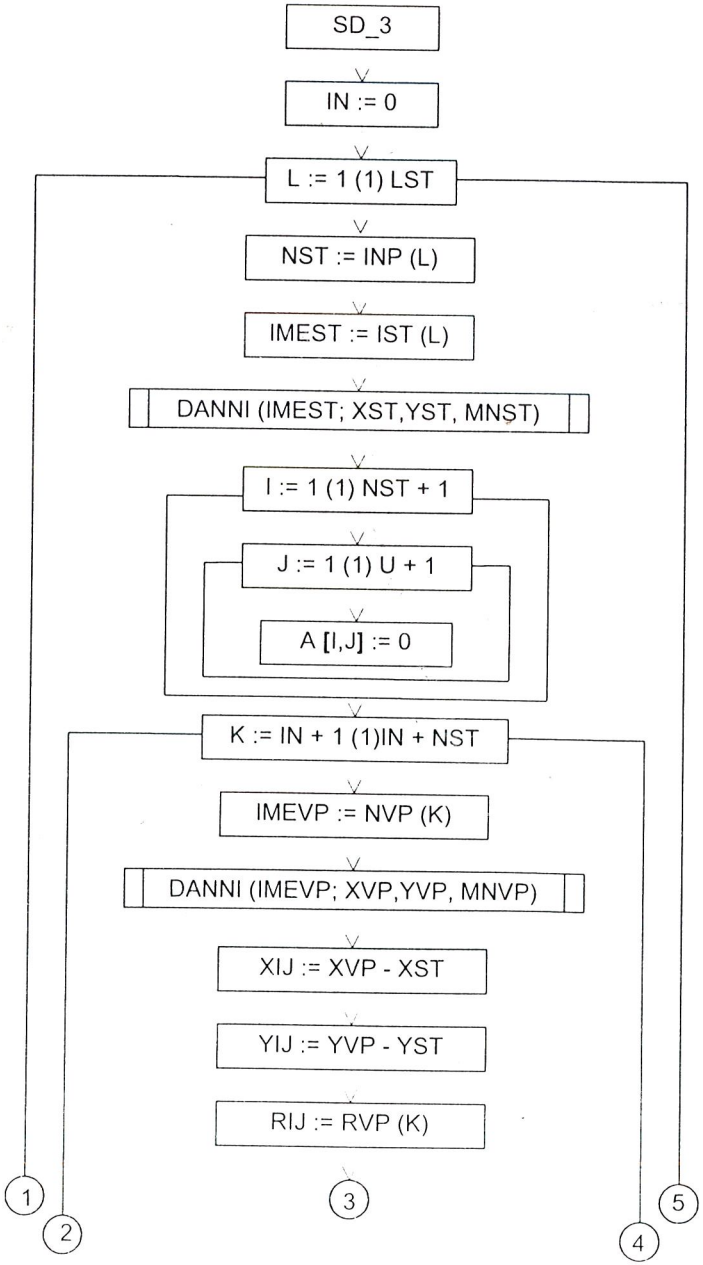
ALFA(XA, YA, XB, YB)

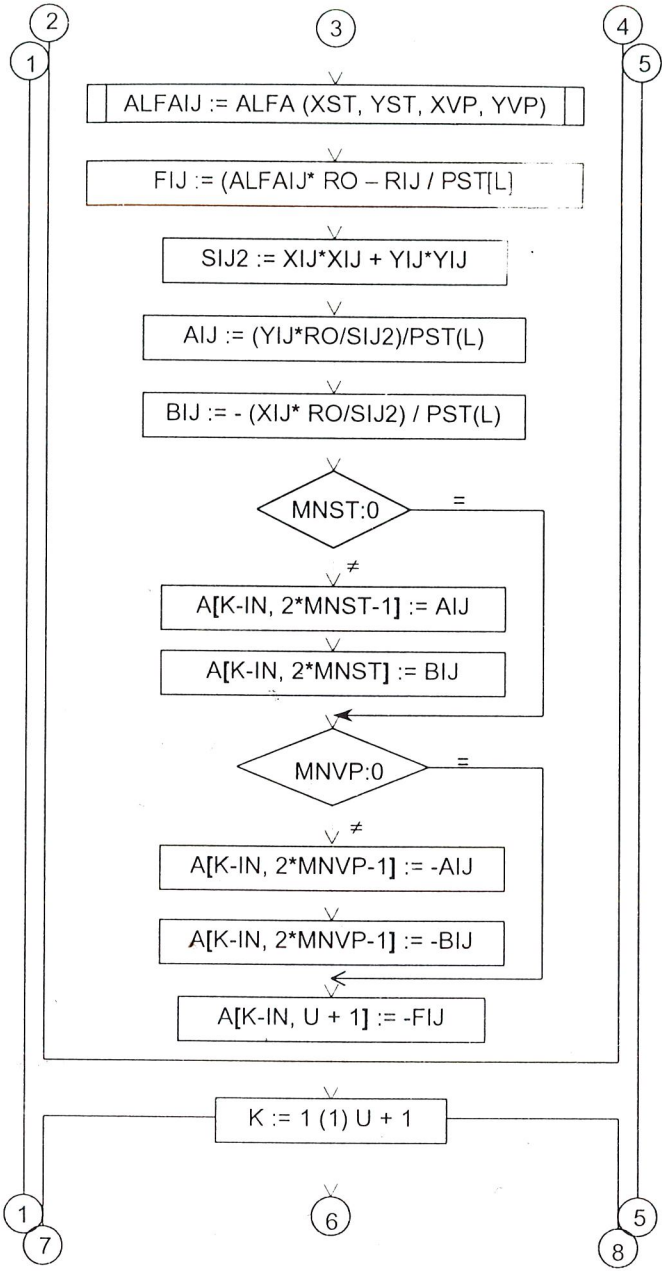
Trong SD_4 và SD_5 ngoài chỉ định ở SD_1, SD-2 và SD_3 mảng thông tin và trường làm việc sử dụng thêm mới:

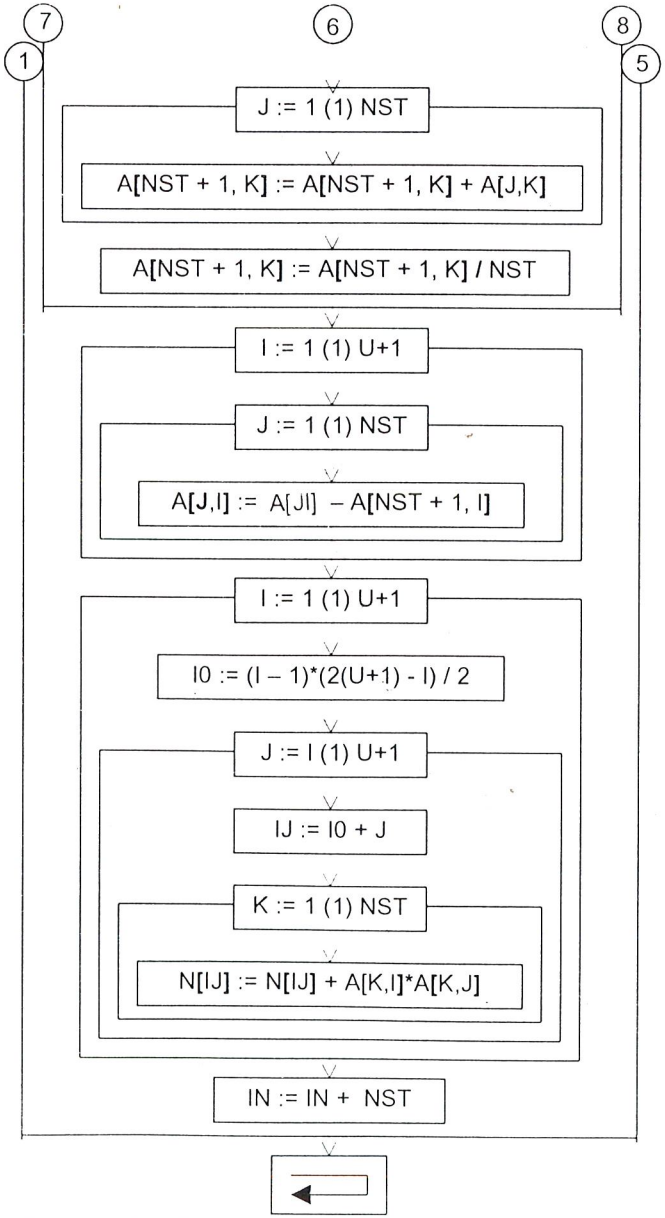
A_ mảng hai chiều để ghi bảng 2.4.1.

N_ mảng một chiều trong đó ghi hệ số phương trình chuẩn (không ghi các thành phần dưới đường chéo chính).

Biến N phục vụ đến các hướng theo trạm đã xử lý theo tuần tự như sổ đo góc (mảng NVP và RVP).


SD_3
IN := 0
L := 1 (1) LST
NST := INP (L)
IMEST := IST (L)
DANNI (IMEST; XST,YST, MNST)
I := 1 (1) NST + 1
J := 1 (1) U + 1
A [I,J] := 0
K := IN + 1 (1)IN + NST
IMEVP := NVP (K)
DANNI (IMEVP; XVP,YVP, MNVP)
XIJ := XVP - XST
YIJ := YVP - YST
RIJ := RVP (K)
1
2
3
4
5


2
3
4
1
5
ALFAIJ := ALFA (XST, YST, XVP, YVP)
FIJ := (ALFAIJ* RO – RIJ / PST[L]
SIJ2 := XIJ*XIJ + YIJ*YIJ
AIJ := (YIJ*RO/SIJ2)/PST(L)
BIJ := - (XIJ* RO/SIJ2) / PST(L)
MNST:0
=
≠
A[K-IN, 2*MNST-1] := AIJ
A[K-IN, 2*MNST] := BIJ
MNVP:0
=
≠
A[K-IN, 2*MNVP-1] := -AIJ
A[K-IN, 2*MNVP-1] := -BIJ
A[K-IN, U + 1] := -FIJ
K := 1 (1) U + 1
1
6
5
7
8



Hình 2.4.2. Sơ đồ cấu trúc SD_4; thành lập hệ phương trình chuẩn với bình sai đo góc.

Trong sơ đồ SD_4 (hình 2.4.2) sử dụng các ký hiệu sau:

IMEST - Tên trạm,

IMEVP - Tên điểm ngắm,

XST, YST - Tọa độ trạm,

MNST - Số máy trạm,

XNVP, YNVP - Tọa độ các điểm ngắm,

MNVP - Số máy của điểm ngắm,

XIJ, YIJ - Hiệu số toạ độ /I→MST; J→MVP/,

RIJ - Hướng ngắm từ MST đến MVP,

ALFAIJ - Góc phương vị hướng MST-MVP,

FIJ - Số hạng tự do,

SIJ2 - Bình phương khoảng cách MST-MVP,

AIJ, BIJ - Hệ số hướng /từ MST đến MVP/.

2.4.2. Sơ đồ cấu trúc thành lập hệ phương trình chuẩn ở bình sai mạng đo cạnh (SD_5)

Trong sơ đồ cấu trúc SD_5 (hình 2.4.3) sử dụng các mảng thông tin và trường làm việc tương tự như ở SD_4. Trường làm việc là mảng D, trong đó ghi hệ số và số hạng tự do của phương trình hiệu chỉnh cạnh đo. Các phương trình này tuần tự thay nhau trong mảng D.

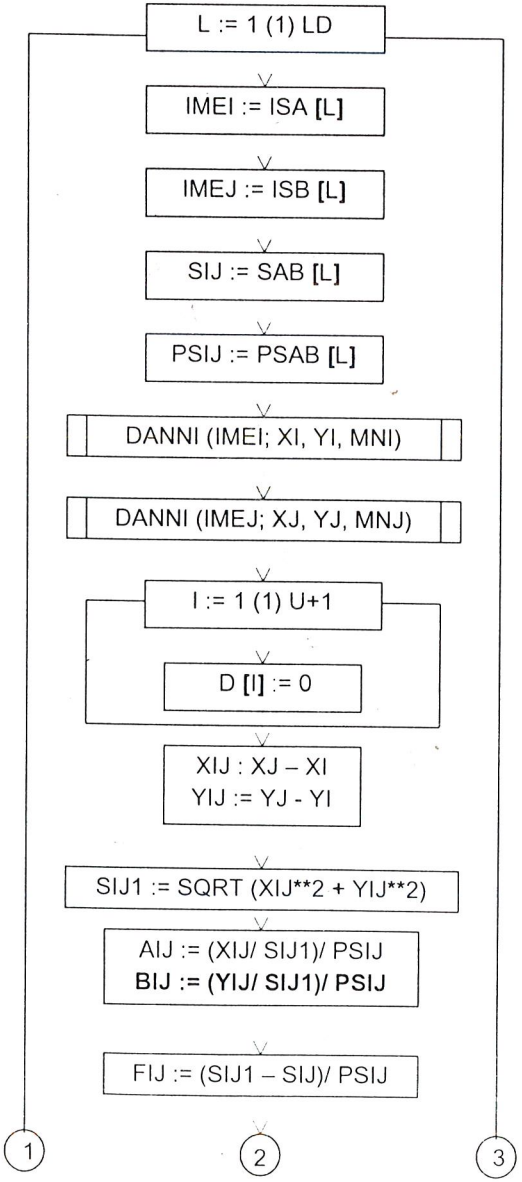
Ở đây sử dụng các biến sau:

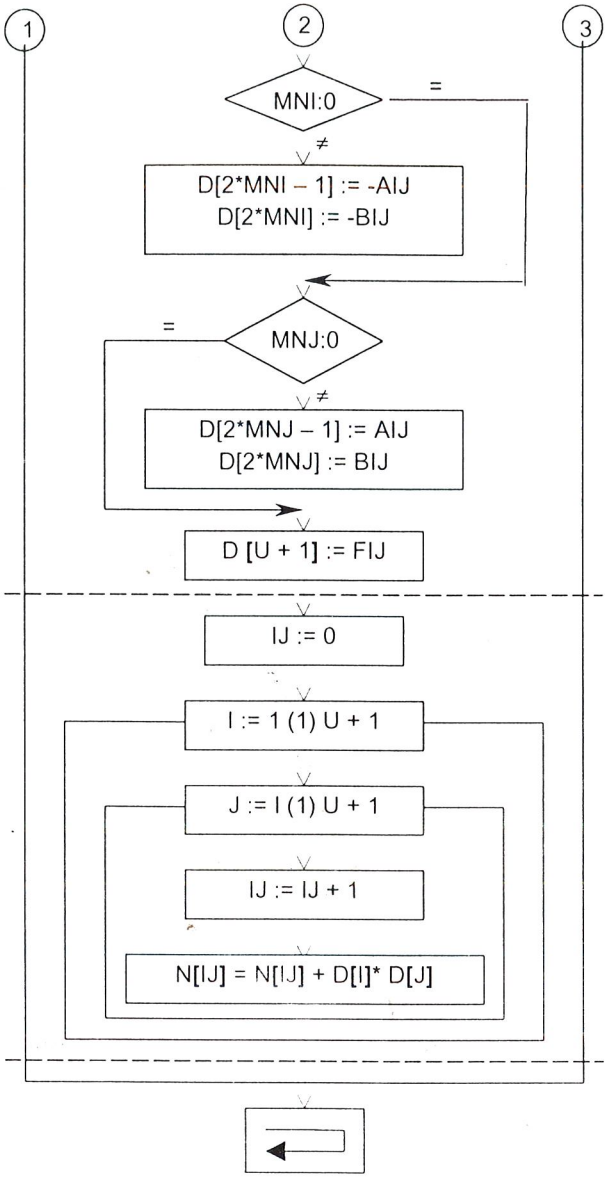
IMEI - Tên của điểm đầu (I),

IMEJ - Tên của điểm cuối (J),

SIJ - Độ dài đo,

PSIJ - Sai số của SIJ,


L := 1 (1) LD
IMEI := ISA [L]
IMEJ := ISB [L]
SIJ := SAB [L]
PSIJ := PSAB [L]
DANNI (IMEI; XI, YI, MNI)
DANNI (IMEJ; XJ, YJ, MNJ)
I := 1 (1) U+1
D [I] := 0
XIJ : XJ – XI
YIJ := YJ - YI
SIJ1 := SQRT (XIJ**2 + YIJ**2)
AIJ := (XIJ/ SIJ1)/ PSIJ
BIJ := (YIJ/ SIJ1)/ PSIJ
FIJ := (SIJ1 – SIJ)/ PSIJ
1
2
3



Hình 2.4.3. Sơ đồ cấu trúc SD-5 thành lập hệ phương trình chuẩn với bình sai đo cạnh.

XI. YI - Tọa độ gần đúng của điểm I,

XJ. YJ - Tọa độ gần đúng của điểm J,

XIJ, YIJ - Hiệu tọa độ,

MNI, MNJ - Số máy của điểm i và J,

AIJ, BIJ - Hệ số trong phương trình của SIJ,

FIJ - Số hạng tự do của phương trình SIJ,

SIJ1 - Trị gần đúng của độ dài đo SIJ.

Dạng chung của phương trình hiệu chỉnh của độ dài đo là

$$Vs_{ij} = -\alpha_{ij}dx_i - \beta_{ij}dy_i + \alpha_{ij}dx_j + \beta_{ij}dy_j + f_{ij}\,. \qquad (2.4.6)$$

ở đây

$$\alpha_{ij} = \frac{x_j^0 - x_i^0}{S_{ij}^0}, \beta_{ij} = \frac{y_j^0 - y_i^0}{S_{ij}^0}, f_{ij} = S_{ij}^0 - S'_{ij}\,,$$

với $x_i^0, y_i^0, x_j^0, y_j^0$ - Trị gần đúng của điểm i và j, S_{ij}^0 - Trị gần đúng của độ dài giữa i và j .

$$S_{ij}^0 = \sqrt{(x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2}\,,$$

S'_{ij} - trị đo.

Sắp đặt của SD_4 và SD_5 có thể thấy tương tự hoàn toàn như nhau giữa hai cấu trúc. Điều đáng nói là sự cộng dồn vào phương trình chuẩn thực hiện trên một hệ thống chung. Vị trí của phần tử N_{ij} tính theo

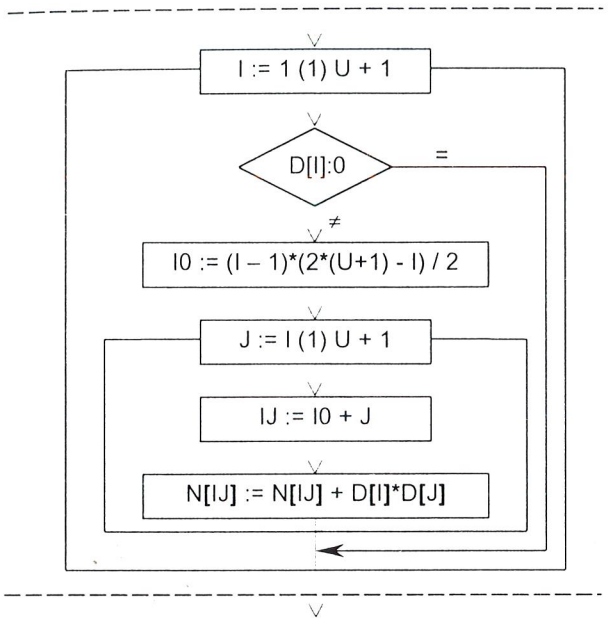
$$ij = (i-1)(2(u+1)-i) / 2+j \qquad (2.4.7)$$

là sử dụng

$$ij = i_0 + j\,. \qquad (2.4.8)$$

trong đó $$i_0 = (i-1)(2(u+1) - i) / 2. \qquad (2.4.9)$$

Vì i_0 không phụ thuộc j, mà có thể đưa ra trước chu kỳ theo j.



Hình 2.4.4. Trường hợp khi D[I] nhận giá trị không

2.5. ỨNG DỤNG BÌNH SAI ĐIỀU KIỆN TRONG TÍNH TOÁN TRẮC ĐỊA

2.5.1. Bình sai điều kiện

Bài toán bình sai điều kiện xác định theo cách sau cho hệ phương trình điều kiện độc lập tuyến tính với n ẩn hiệu chỉnh ($r \leq n$):

$$\begin{aligned} &a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n + w_1 = 0,\\ &b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n + w_2 = 0,\\ &.....,\\ &r_1v_1 + r_2v_2 + ... + r_nv_n + w_r = 0, \end{aligned} \qquad (2.5.1)$$

giải với điều kiện $$[pvv] = \text{mín}, \tag{2.5.2}$$

ở đây

$$P_i = \frac{k}{m_i^2} \quad (i = \overline{1,n})$$

là trọng số đo.

Bài toán này có thể đơn giản hơn khi đưa về hiệu chỉnh chuẩn hoá, tức đưa về trường hợp đo cùng độ chính xác. Như đã biết hiệu chỉnh chuẩn hoá biểu diễn qua

$$\hat{v}_i = \frac{v_i}{m_i} \ (i = \overline{1,n}) \tag{2.5.3}$$

vì vậy

$$v_i = \hat{v}_i m_i, \tag{2.5.4}$$

vậy phương trình (2.5.1) và (2.5.2) có thể thay đổi dạng

$$\begin{aligned} &\hat{a}_1\hat{v}_1 + \hat{a}_2\hat{v}_2 + \ldots + \hat{a}_n\hat{v}_n + w_1 = 0, \\ &\hat{b}_1\hat{v}_1 + \hat{b}_2\hat{v}_2 + \ldots + \hat{b}_n\hat{v}_n + w_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\hat{r}_1\hat{v}_1 + \hat{r}_2\hat{v}_2 + \ldots + \hat{r}_n\hat{v}_n + w_r = 0, \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

$$[\hat{v}\hat{v}] = \min, \tag{2.5.6}$$

ở đây

$$\hat{a}_i = a_i m_i, \quad \hat{b}_i = b_i m_i, \ \ldots, \ \hat{r}_i = r_i m_i \ (i = \overline{1,n}).$$

Đưa vào ký hiệu

$$\underset{(r,n)}{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \cdots & \hat{a}_n \\ \hat{b}_2 & \hat{b}_2 & \cdots & \hat{b}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{r}_1 & \hat{r}_2 & \cdots & \hat{r}_n \end{bmatrix}, \ \underset{(n,1)}{\hat{V}} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \vdots \\ \hat{v}_n \end{bmatrix}, \ \underset{(r,1)}{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix}, \tag{2.5.7}$$

Khi đó bài toán bình sai điều kiện chuyển sang dạng sau: Tìm lời giải phương trình

$$\underset{(r,n)}{\hat{A}} \quad \underset{(n,1)}{\hat{V}} + \underset{(r,1)}{W} = 0 \tag{2.5.8}$$

với điều kiện

$$\hat{V} * \hat{V} = \min. \tag{2.5.9}$$

Có thể chứng minh rằng điều kiện (2.5.9) đòi hỏi hiệu chỉnh $\hat{V}_1, \hat{V}_2, \ldots, \hat{V}_n$ biểu diễn tuyến tính của các số hạng $k_1, k_2, \ldots k_r$, mà Gauss gọi là ẩn quan hệ.

Đưa vào ma trận cột ẩn quan hệ

$$\underset{(r,1)}{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix}.$$

Có thể chứng minh rằng, điều kiện (2.5.9) dẫn đến

$$\underset{(n,1)}{\hat{V}} = \underset{(n,r)}{\hat{A}} * \underset{(r,1)}{K} \tag{2.5.10}$$

Để giải bài toán cuối cùng, tương tự như bình sai gián tiếp, có hai thuật toán

- Phương pháp gián tiếp, ở đây ẩn quan hệ được tính.

- Phương pháp trực tiếp, ở đây hiệu chỉnh nhận được mà không cần tính ẩn quan hệ.

Mỗi một loại thuật toán có đặc thù riêng nhưng không khác nhau về thực chất.

Phương pháp gián tiếp không thích hợp với làm việc trên máy tính, vì cần trường làm việc lớn và chương trình sẽ dài hơn. Nó chỉ có hiệu quả với dùng máy tính thông thường.

Phương pháp gián tiếp sử dụng phương pháp trực giao tuần tự (theo xây dựng của Bols) và cho quá trình tự động hoá với tiết kiệm trường làm việc và chương trình ngắn hơn.

Ở đây sẽ xem xét trường hợp phương pháp trực tiếp để giải hệ phương trình theo phương pháp bình phương tối thiểu. Ta coi như tất cả đã đưa về cùng trọng số của các đại lượng đo.

2.5.2. Giải bài toán bình sai điều kiện theo phương pháp trực giao tuần tự (phương pháp trực tiếp)

Sử dụng phương trình (2.5.8) với hiệu chỉnh chuẩn hoá

$$A\,V + W = 0, \tag{2.5.11}$$

Có thể viết được ngay

$$V = -A^{-1}_{ph.ch}\,W, \tag{2.5.12}$$

ở đây $A^{-1}_{ph.ch}$ là ma trận nghịch đảo của A. Nói cách khác lời giải (2.5.12) không đơn trị.

Ta sẽ chứng minh, rằng điều kiện

$$V^*V = \min \tag{2.5.13}$$

dẫn đến lời giải

$$V = -A^{-1}_{ph.ch}\,W, \tag{2.5.14}$$

ở đây $A^{-1}_{ph.ch}$ là ma trận ngược - phải - chính của A, xác định tương quan (xem phụ lục IV)

$$A^{-1}_{ph.ch} = A^*(AA^*)^{-1}. \tag{2.5.15}$$

Thật vậy, sử dụng tương đương của (2.5.13) điều kiện

$$V = A^*K, \tag{2.5.16}$$

ta nhận được sau khi thay (2.5.16) vào (2.5.11)

$$(AA^*)K + W = 0 \tag{2.5.17}$$

Phương trình (2.5.17) là dạng ma trận của phương trình ẩn tương quan.

Giải (2.5.17) theo K

$$K = -(AA^*)^{-1}W \tag{2.5.18}$$

và thay vào (2.5.16) ta có

$$V = -A^*(AA^*)^{-1}W, \tag{2.5.19}$$

mà với (2.5.15) biến đổi vào (2.5.14), tức điều ta muốn làm sáng tỏ.

Khi sử dụng tính năng của phương trình chuẩn từ phương pháp bình phương tối thiểu, ta thấy ma trận hệ số trọng số của cột số hạng tự do trùng với ma trận trước ẩn số tương quan ta có

$$Q_w = AA^*. \tag{2.5.20}$$

Trong trường hợp này ma trận hệ số trọng số cho V sẽ có khi để ý đến (2.5.19) và (2.5.20)

$$Q_V = A^*(AA^*)^{-1}A = A^{-1}_{ph.ch}A\,. \tag{2.5.21}$$

Có thể chứng minh rằng, ma trận của hệ số trọng số của trị bình sai

$$\bar{l} = l + V \tag{2.5.22}$$

có thể xác định theo công thức

$$Q_{\bar{l}} = Q_l - Q_V\,. \tag{2.5.23}$$

Và vì với trường hợp (đại lượng đo cùng độ chính xác, tương ứng hiệu chỉnh chuẩn hoá) $Q_l = E$, vì vậy

$$Q_l = E - A^{-1}_{ph.ch} A. \qquad (2.5.24)$$

Thật vậy từ (2.5.11) ta có

$$W = -AV \qquad (2.5.25)$$

Phương trình (2.5.25) thoả mãn với chỗ hiệu chỉnh $V_i = \bar{l}_i - l_i$ đặt sai số thực $\varepsilon_i = l^0_i - l_i$, trong đó l^0_i là trị thực của đại lượng đo (nghĩa là hằng số).

Trong trường hợp này (2.5.25) có thể viết

$$W = -A(l^0 - l) = Al + \text{các số hạng hằng số} \qquad (2.5.26)$$

Từ (2.5.14) với (2.5.26) ta nhận được

$$V = -A^{-1}_{ph.ch} W = -A^{-1}_{ph.ch} Al + \text{các số hạng hằng số.}$$

Vì vậy

$$\bar{l} = l + v = l - A^{-1}_{ph.ch} Al + \text{các số hạng hằng số} =$$

$$= (E - A^{-1}_{ph.ch} A)l + \text{các số hạng hằng số.} \qquad (2.5.27)$$

Từ (2.5.27), khi chú ý sự đồng nhất của $(E - A^{-1}_{ph.ch} A)$ và $Q_l = E$, tìm được $Q_l = E - A^{-1}_{ph.ch} A$,

Tức nhận (2.5.24), điều mà ta muốn chứng minh.

Ta cho rằng ma trận A (xem phụ lục II) được phân chia trực giao

$$A = T^*_{p} U_{p}, \qquad (2.5.28)$$
$$(r,n)$$

Ở đây T_p là ma trận tam giác trên, còn U_p là ma trận dạng A với trực giao với nhau giữa các hàng, tức

$$U_p U^*_p = E. \qquad (2.5.29)$$

Trong trường hợp như thế

$$A^{-1}_{ph.ch} = U^*_p T^{*-1}_p ; \quad (2.5.30)$$

$$A^{-1}_{ph.ch} = U^*_p U_p \quad (2.5.31)$$

Khi đặt (2.5.30) và (2.5.31) vào (2.5.14) và (2.5.24) nhận được

$$V = -U^*_p T^{*-1}_p W = -U^*_p \tilde{W} \quad (2.3.32)$$

$$Q_l = E - U^*_p U_p . \quad (2.5.33)$$

Theo công thức (2.5.32) sử dụng ký hiệu

$$\tilde{W} = T^{*-1}_p W . \quad (2.5.34)$$

Giải (2.5.28) theo U_p ,nhận

$$U_p \equiv \tilde{A} = T^{*-1}_p A \quad (2.5.35)$$

So sánh (2.5.34) với (2.5.35) thấy rằng $\tilde{W}$ nhận được theo cách như ở W, với $\tilde{A} \equiv U_p$ của A. Tính chất này đặc biệt quan trọng. Ta biết rằng nhận được U_p (xem phụ lục II) ma trận T_p không nhất thiết phải giữ lại. Vì vậy nếu cùng với $\tilde{A}$ tính luôn $\tilde{W}$, việc giữ T_p là thừa. Trường hợp tính Q_l ma trận T_p không tham gia trực tiếp. Tất cả những căn cứ trên cho phép đưa ra một quá trình biến đổi hệ thống thông tin

$$\bar{A} = [AW]$$

vào hệ thống

$$\tilde{\bar{A}} = [\tilde{A}\tilde{W}]$$

không phải tốn bộ nhớ.

Ký hiệu $\tilde{A}$ cho U_p ta sử dụng để chỉ ra rằng $\tilde{A}$ ghi trên A, tương ứng $\hat{A}$. Cũng như vậy đối với trường hợp cột $\tilde{W}$.

Từ tất cả trình bày đến đây thấy rằng việc giải bài toán bình sai điều kiện trên máy tính cần phải biến đổi các phương

trình điều kiện của hệ thông tin /xem như hiệu chỉnh đã chuẩn hoá/ theo một sơ đồ sau

$$[AW] \rightarrow [\hat{A}W] \rightarrow [\tilde{A}\tilde{W}] .$$

Bước chuyển thứ nhất ($[AW] \rightarrow [\hat{A}W]$) đưa đến chuẩn hoá số hiệu chỉnh và biến đổi hệ số phương trình điều kiện.

Ma trận $[\tilde{A}\tilde{W}]$ chứa tất cả thông tin cần thiết để nhận hiệu chỉnh chuẩn hoá theo công thức (2.5.32) và hệ số trọng số của trị bình sai chuẩn hoá $\hat{\tilde{l}}_j = \hat{l}_j + \hat{v}_j$ theo công thức (2.5.33).

Công thức (2.5.32) và (2.5.33) viết ở dạng khai triển

$$\hat{V}_j = -\sum_{i=1}^{r} \tilde{A}_{ij}\tilde{W}_i \; ; \tag{2.5.36}$$

$$(Q_{\hat{l}})_{jj} = \frac{1}{P_{\hat{l}_j}} = 1 - \sum_{i=1}^{r} \tilde{A}_{ij}^2 \quad (j = \overline{1,n}) \tag{2.5.37}$$

Vì rằng

$$v_j = m_j\hat{v}_j, \;\; \bar{l}_j = m_j\hat{\tilde{l}}_j; \tag{2.5.38}$$

$$\frac{1}{P_{\bar{l}_j}} = \frac{1}{P_{\hat{l}_j}} . m_j^2 , \tag{2.5.39}$$

nên cuối cùng có:

$$V_j = -m_j \sum_{i=1}^{r} \tilde{A}_{ij}\tilde{W}_i , \tag{2.5.40}$$

$$\frac{1}{P_{\bar{l}_j}} = m_j^2 \sum_{i=1}^{r} \tilde{A}_{ij}^2 . \tag{2.5.41}$$

Biến đổi

$$[\hat{A}W] \rightarrow [\tilde{A}\tilde{W}]$$

thực hiện theo công thức:

$$A_{kj.k} = A_{kj.k-1} \Big/ \sqrt{\sum_{h=1}^{n} A^2_{kh.k-1}} \quad ; \qquad (2.5.42)$$

$$A_{ij.k} = A_{ij.k-1} - A_{kj.k} \sum_{h=1}^{n} A_{ih.k-1} A_{kh.k} \; ;$$

$$i = \overline{k+1,r} \; ; \; j = \overline{1,n+1} \; ; \; k = \overline{1.r}$$

Ở đây A_{ij} là thành phần ma trận $[\hat{A}W]$, còn $A_{kj.k} = \tilde{A}_{kj}$ là thành phần của ma trận $[\tilde{A}\tilde{W}]$.

Để kiểm tra cuối cùng việc thực hiện bình sai có thể sử dụng công thức

$$\hat{V} * \hat{V} \rightarrow \tilde{W} * \tilde{W}$$

suy trực tiếp từ (2.5.32).

Sai số trung phương trọng số đơn vị tính theo công thức

$$m_e = \sqrt{\frac{\hat{V} * \hat{V}}{r}} \qquad (2.5.43)$$

với sơ bộ chuẩn hoá hiệu chỉnh cần gần bằng 1.

2.5.3. Sơ đồ khối và đồ hình để giải bài toán bình sai điều kiện theo phương pháp trực giao tuần tự

Những thông tin đầu vào để giải bài toán bình sai điều kiện là hệ số và số hạng tự do của phương trình điều kiện và sai số trung phương của đại lượng đo (nếu có độ chính xác khác nhau).

1. Thiết lập thông tin ban đầu của hệ phương trình điều kiện và sai số trung phương của đại lượng đo (A và M)

2. Đưa phương trình điều kiện hiệu chỉnh chuẩn hoá

$$([AW] \rightarrow [\hat{A}W])$$

3. Biến đổi phương trình điều kiện theo phương pháp tuần tự trực giao.

$$([\hat{A}W] \rightarrow [\tilde{A}\tilde{W}])$$

4. Tính $\Sigma \tilde{W}^2$ (VV1 : = $\Sigma \tilde{W}^2$) và sai số trung phương trọng số đơn vị.

$$m_e \ (ME = m_e)$$

5. Tính hiệu chỉnh đại lượng đo trực tiếp, đại lượng $\Sigma \overline{V}^2$ (VV = $\Sigma \hat{V}^2$) và sai số trung phương của đại lượng bình sai (không phải chuẩn hoá).

6. Thu nhận kết quả cuối cùng.

Trong sơ đồ khối (hình 2.5.1) và đồ hình (hình 2.3.2) nói đến các mảng sau:

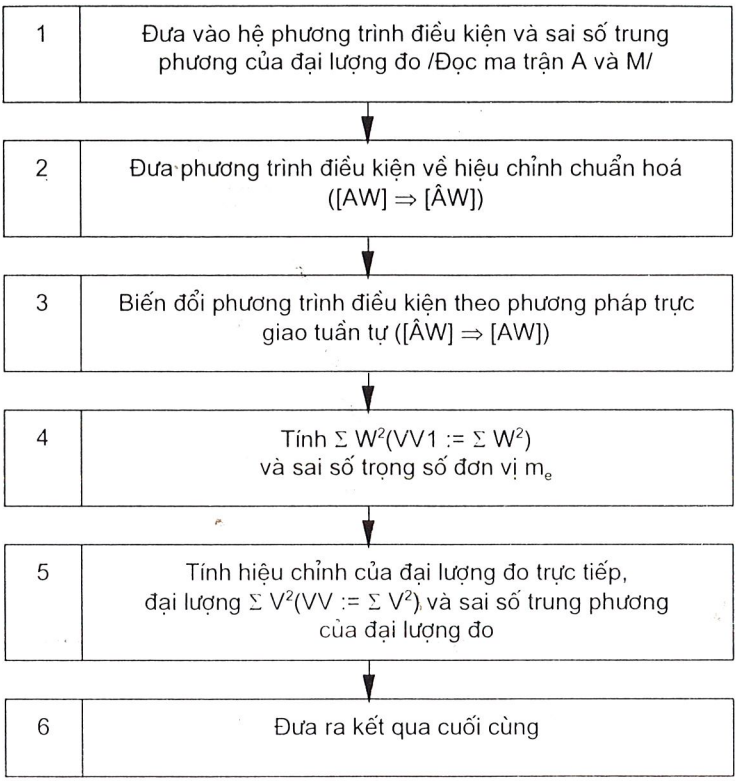
A- Mảng hai chiều với kích thước [r, n + 1], ở đây r là số phương trình điều kiện, còn n là số đại lượng đo. Ma trận A ghi hệ số và cả số hạng tự do, tức ma trận [AW], và sự biến đổi của ma trận $[\tilde{A}\tilde{W}]$.

M- mảng một chiều với độ dài n; ở trong đó ghi sai số trung phương của đại lượng đo. Với đo cùng độ chính xác thì được ghi là một ở chỗ sai số đo.

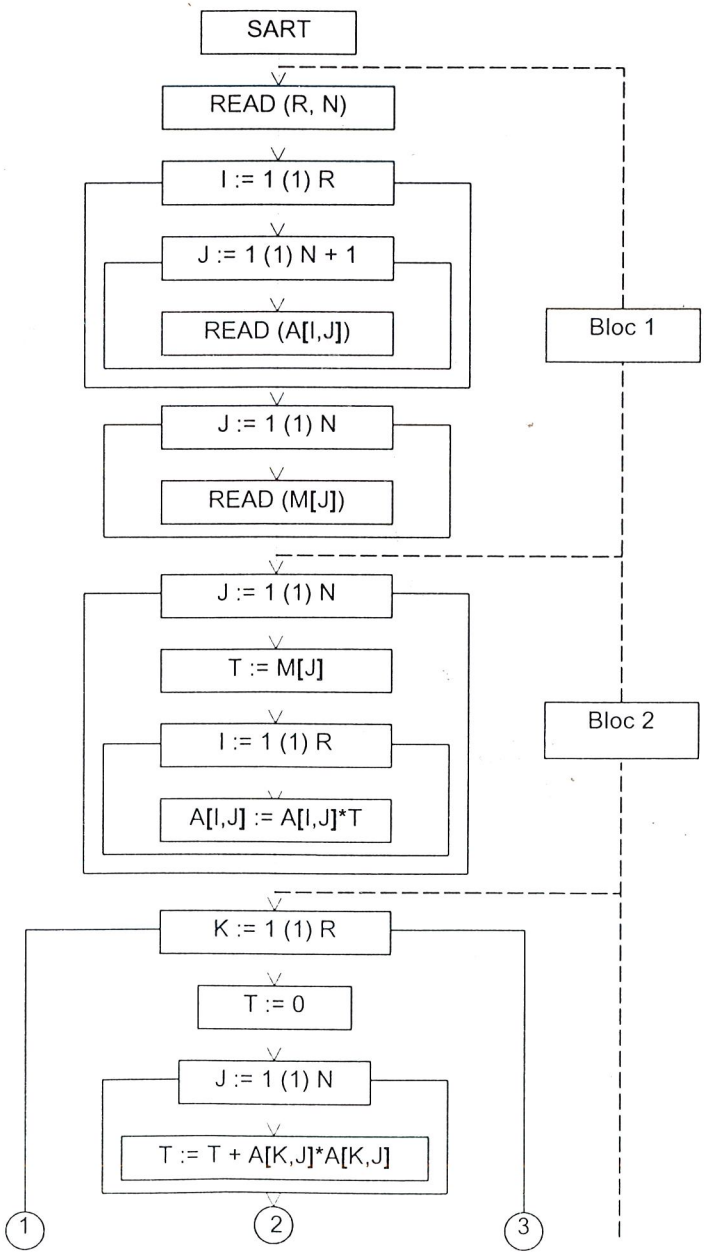
Chú ý đến bloc 2 trong đồ hình việc đưa về chuẩn hoá hiệu chỉnh. Trong bloc này chu kỳ trong theo i, tức theo hàng của A, mà không phải theo j, như trường hợp theo thói quen. Nhưng đó không phải là ngẫu nhiên. Trong mảng m tham gia chỉ j lần tham dự nhận sai số đo thứ j. Đại lượng này được ghi ở biến T. Hiện tượng tương tự như thế không có nghĩa gì đến cấu trúc, nhưng cần đến tối ưu hoá chương trình.

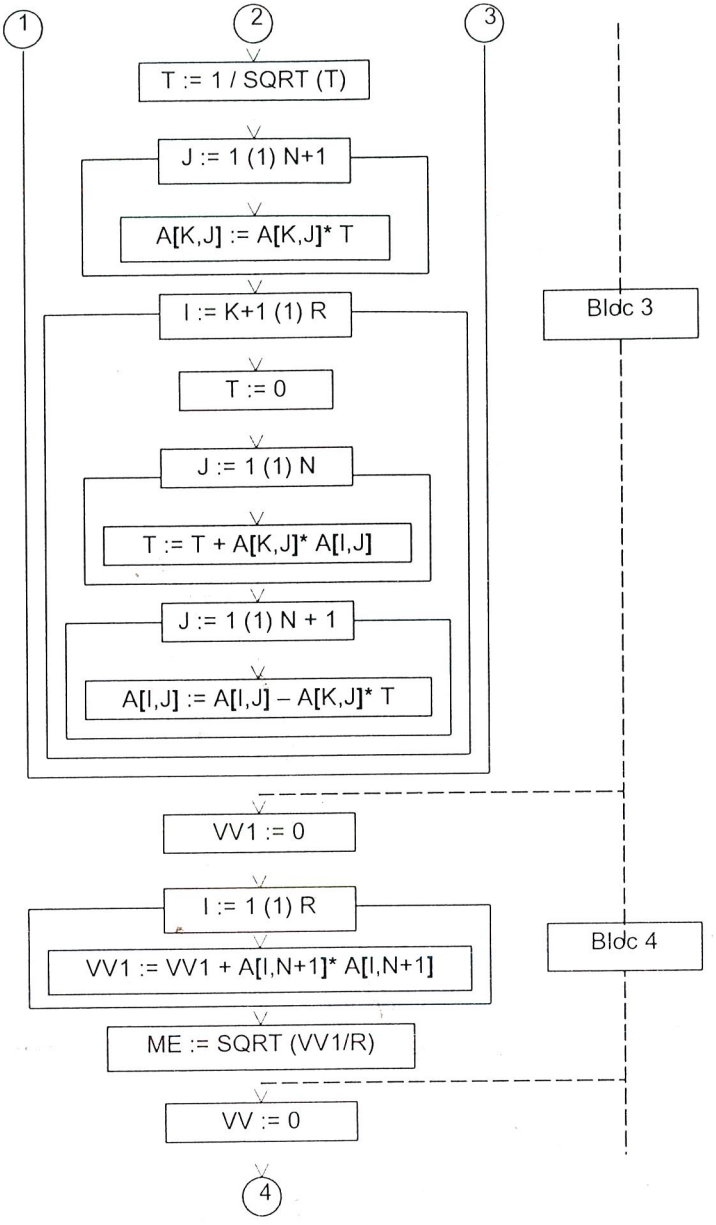
Giải bài toán bình sai điều kiện theo thuật toán trình bày dẫn ta đến trị hiệu chỉnh chuẩn hoá, từ đó nhận được hiệu chỉnh do trực tiếp qua việc nhân với sai số trung phương đại lượng đo tương ứng mj (xem công thức 2.5.38) tương tự cũng như sai số trị bình sai sẽ là sai số đại lượng được chuẩn hoá nhân với mj tương ứng.

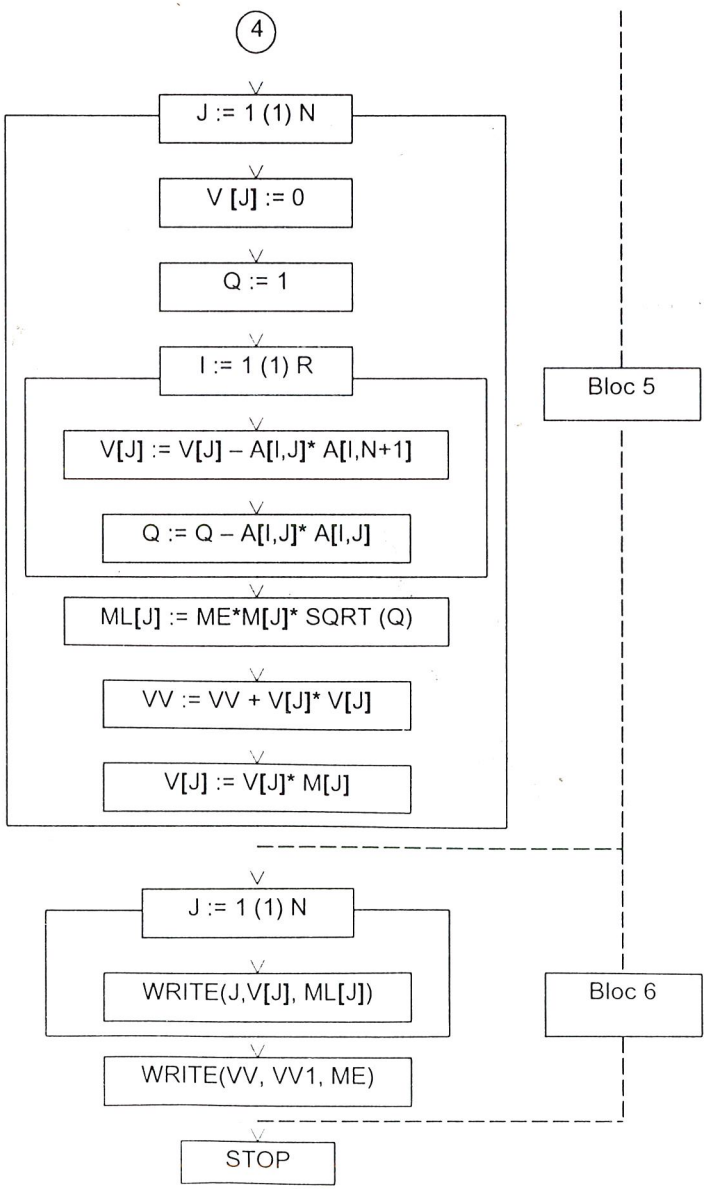
Quá trình trực giao tuần tự có thể bị gián đoạn khi ma trận hệ số của phương trình điều kiện suy biến hay giữa phương trình điều kiện có phụ thuộc tuyến tính.



Hình 2.5.1. **Sơ đồ khối giải hệ phương trình điều kiện theo phương pháp trực giao tuần tự.**


SART
READ (R, N)
I := 1 (1) R
J := 1 (1) N + 1
READ (A[I,J])
J := 1 (1) N
READ (M[J])
Bloc 1
J := 1 (1) N
T := M[J]
I := 1 (1) R
A[I,J] := A[I,J]*T
Bloc 2
K := 1 (1) R
T := 0
J := 1 (1) N
T := T + A[K,J]*A[K,J]
1
2
3


1
2
3
T := 1 / SQRT (T)
J := 1 (1) N+1
A[K,J] := A[K,J]* T
I := K+1 (1) R
Bloc 3
T := 0
J := 1 (1) N
T := T + A[K,J]* A[I,J]
J := 1 (1) N + 1
A[I,J] := A[I,J] – A[K,J]* T
VV1 := 0
I := 1 (1) R
Bloc 4
VV1 := VV1 + A[I,N+1]* A[I,N+1]
ME := SQRT (VV1/R)
VV := 0
4



Hình 2.5.2. Sơ đồ cấu trúc giải hệ phương trình điều kiện theo phương pháp trực giao tuần tự

Chương trình được lập với thuật toán này có thể sử dụng để giải hệ phương trình. Đó chính là trường hợp giới hạn n = r. Tại chỗ của hiệu chỉnh sẽ nhận được ẩn số. Với mục đích này thì một số động tác như chuẩn hoá, đánh giá chính xác không dùng đến.

2.6. SƠ ĐỒ TỔNG QUÁT GIẢI BÀI TOÁN CHUẨN CỦA PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

Ở điểm 2.3 đã xem xét giải bài toán chuẩn của bình sai gián tiếp và điều kiện. Không mất ý nghĩa nếu như có một thuật toán tốt giải cho cả hai bài toán cơ bản của phương pháp bình phương tối thiểu: bình sai gián tiếp và bình sai điều kiện. Một thuật toán như thế được nhà trắc địa Balan, Giáo sư I.Gadziski đưa ra, gọi là K - thuật toán. Ở đây sẽ trình bày thực chất của K - thuật toán và một vài ứng dụng của nó.

Bình sai điều kiện với ẩn số, như đã biết là trường hợp duy nhất của bình sai theo phương pháp bình phương tối thiểu.

Một chương trình giải bài toán tổng quát bình sai với ẩn số phụ có thể giải bài toán bình sai điêù kiện và bài toán bình sai gián tiếp.

2.6.1. Thuật toán tổng quát để giải bài toán theo phương pháp bình phương tối thiểu (K - thuật toán)

Trong việc giải hai bài toán cơ bản của phương pháp bình phương tối thiểu (bình sai gián tiếp và điều kiện) có rất nhiều điểm chung. Mong muốn là xây dựng một thuật toán thuận lợi cho việc giải một bài toán. Nhằm mục đích này sử dụng phương pháp trực giao tuần tự là xuất phát. Đó chính là K - thuật toán.

Giả sử cho ma trận

$$\underset{(m+t,n+s)}{K} = \begin{pmatrix} \underset{(m,n)}{A} & \underset{(m,s)}{B} \\ \underset{(t,n)}{C} & \underset{(t,s)}{D} \end{pmatrix}, \quad m \le n \tag{2.6.1}$$

Biến đổi K theo công thức

$$K_{rj,r} = \frac{K_{rj,r-1}}{\sqrt{\sum_{h=1}^{n} K^2_{rh,r-1}}}$$

$$K_{ij,r} = K_{ij,r-1} - K_{rj,r} \sum_{h=1}^{n} K_{rh,r} K_{ih,r-1}; \tag{2.6.2}$$

$r = 1, 2,...., m;$

$i = r+1, r+2,...., m, m+1, m+2,..., m+t;$

$j = 1, 2,...., n, n+1, n+2,..., n+s;$

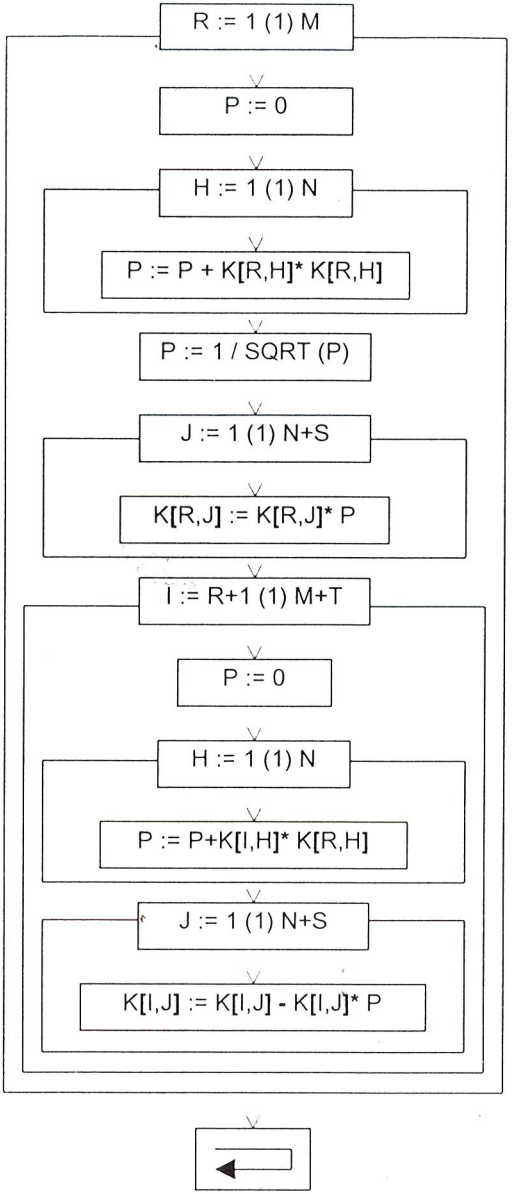
nhận được

$$\underset{(m+t,n+s)}{\tilde{K}} = \begin{bmatrix} \underset{(m,n)}{\tilde{A}} & \underset{(m,s)}{\tilde{B}} \\ \underset{(t,n)}{\tilde{C}} & \underset{(t,s)}{\tilde{D}} \end{bmatrix}, \tag{2.6.3}$$

ở đây

$$\tilde{A} = T^{*-1}_{p} A; \tilde{B} = T^{*-1}_{p} B$$
$$\tilde{C} = C - (C\tilde{A}^*)\tilde{A}; \tilde{D} = D - (C\tilde{A}^*)\tilde{B} \tag{2.6.3a}$$

Ở đây ma trận $\tilde{A}$ là trực giao giữa các hàng với nhau, tức $\tilde{A}\tilde{A}^* = E$, còn T_p là ma trận tam giác trên nhận được trong quá trình phân chia trực giao của A. Thành phần của ma trận T_p được tính xuất hiện dưới dấu Σ trong công thức (2.6.2) nhưng không lưu lại, cũng như ta thực hiện như ở các trường hợp phân chia trực giao khác.



Hình 2.6.1. Sơ đồ cấu trúc của K - thuật toán

Quá trình phân chia có thể bị gián đoạn nếu ma trận A suy biến, tức giữa các dòng có sự phụ thuộc tuyến tính.

Tất cả các thành phần của K ở dạng thực.

Chú ý rằng K- thuật toán có thể áp dụng với một trong ba trường hợp:

1) $t = 0$;

2) $s = 0$;

3) $t = s = 0$.

2.6.1.1. Đồ hình của K - thuật toán

Ta nhận rằng toàn bộ ma trận K đã đưa vào bộ nhớ như là thông tin ban đầu.

Ở hình 2.6.1 là đồ hình của K - thuật toán; nó được thành lập theo công thức (2.6.2), từ đó chúng ta có thể lập phần mềm tính toán.

2.6.2. Ứng dụng của K - thuật toán

Khả năng đa dạng của K - thuật toán rất thuận tiện cho việc tổ chức tự động hoá xử lý trong trắc địa. Ở đây ta chỉ xem xét những ứng dụng quan trọng nhất của K - thuật toán trong tính toán trắc địa.

2.6.2.1. Tính ma trận nghịch đảo

Cho ma trận A không suy biến dạng (m,n) với ($m \leq n$). Thành lập ma trận

$K =$

	n	m
m	$A \equiv \hat{A}$	$B \equiv E$
n	$C \equiv E$	$D \equiv O$

(2.6.4)

Sau khi biến đổi theo K - thuật toán nhận được

$$\tilde{K} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & n & m \\ \hline m & \tilde{A} \equiv U_p & \tilde{B} \equiv T^{*1}_p \\ \hline n & \tilde{C} = E - U^*_p U_p & \tilde{D} = -A^{-1}_{p.ch} \\ \hline \end{array} \qquad (2.6.4a)$$

Ở đây U_P là ma trận trực giao giữa các hàng với nhau ($U_P U^*_P = E$), còn T_P là ma trận tam giác nhận được trong quá trình phân tích trực giao của ma trận $\hat{A}$ ($\hat{A} = U^*_p U_p$).

Thật vậy với trợ giúp của (2.6.3a) thấy sự đúng đắn của xây dựng $\tilde{K}$, cho trong (2.6.4a)

$$\tilde{A} = T^{*-1}_P A = U_P ;$$

$$\tilde{B} = T^{*-1}_P E = T^{*-1}_P$$

$$\tilde{C} = E - (EU^*_P)U_P = E - U^*_P U_P .$$

$$\tilde{D} = O - (EU^*_P)T^{*-1}_P = -U^*_P T^{*-1}_P = -A^{-1}_{P.ch}$$

Khi ma trận ban đầu là đúng, thực hiện lật ngược ma trận A*. Trong trường hợp như thế $U_P \to U^*_h, T_P \to T_h [A^* = (U_h T_h)^*]$.

2.6.2.2. Bình sai gián tiếp

Giả sử phương trình hiệu chỉnh chuẩn hoá biểu diễn qua

$$\underset{(n,1)}{\hat{V}} = \underset{(n,u)}{\hat{A}} \underset{(u,1)}{X} + \underset{(n,1)}{\hat{F}} . \qquad (2.6.5)$$

Nhận rằng cột X^0 chứa trị gần đúng của ẩn, tiến hành biến đổi K - thuật toán cho dạng sau

$$K = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & n & u \\ \hline u & A \equiv \hat{A}^* & B \equiv E \\ \hline 1 & C \equiv \hat{F}^* & D \equiv X^{0*} \\ \hline \end{array} \qquad (2.6.6)$$

Sau khi biến đổi K theo K - thuật toán nhận được $\widetilde{K}$ với cấu trúc sau

$$\widetilde{K} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & n & u \\ \hline u & \widetilde{A} = U^*_h & \widetilde{B} = T^{*-1}_h \\ \hline 1 & \widetilde{C} = \hat{V}^* & \widetilde{D} = (X^0 + X)^* \\ \hline \end{array} \qquad (2.6.7)$$

Với trợ giúp của (2.6.3a) có thể chứng tỏ trong (2.6.7) là cấu trúc của $\widetilde{K}$. Thật vậy

$$\widetilde{A} = T^{*-1}_h \hat{A}^* = U^*_h;$$

$$\widetilde{B} = T^{*-1}_h E = T^{*-1};$$

$$\widetilde{C} = \hat{F}^* (E - U_h U^*_h) = V^*;$$

$$\widetilde{D} = X^{0*} - \hat{F}^* U_h T^{*-1}_h = X^{0*} - \hat{F}^* (-A^{-1}_{tr.ch})^*$$

$$= X^{0*} + X^*.$$

Trong ma trận (2.6.7) chứa tất cả những gì cần thiết cho lời giải của bài toán. Chúng ta có sẵn hiệu chỉnh (V) và nghiệm (X^0 + X) và có thể tính trọng số đảo của trị bình sai hay ẩn số. Trọng số đảo của trị bình sai thứ j nhận được khi lấy tổng bình phương của cột j của ma trận U^*_h, tức

$$\frac{1}{P_{\tilde{j}\tilde{j}}} = u^2_{j1} + u^2_{j2} + \ldots + u^2_{jm}; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2.6.8)$$

ở đây m là ẩn số còn $\tilde{l}_j = \hat{l}_j + \hat{v}_j$ là trị bình sai chuẩn hoá.

Trọng số đảo của ẩn số nhận được theo công thức

$$\frac{1}{P_{xi}} = (t^{ii})^2 + (t^{i(i+1)})^2 + \ldots + (t^{im})^2 \,,\; i = \overline{1,u}\,. \qquad (2.6.9)$$

Đáng chú ý là lời giải sử dụng khá nhiều bộ nhớ, ví dụ một nửa dưới của B chứa toàn số không.

Để giải quyết vấn đề này có thể tìm cách như ma trận K ghi theo mảng một chiều, vị trí các phần tử như đã làm tương tự ở thuật toán Banaxiêvich.

Nếu ẩn và trọng số đảo không cần thiết ma trận K, tương ứng $\widetilde{K}$ sẽ ở dạng

$$K = \begin{bmatrix} \hat{A}^* \\ \hat{F}^* \end{bmatrix}; \qquad (2.6.10)$$

$$\widetilde{K} = \begin{bmatrix} U^*_h \\ \hat{V}^* \end{bmatrix}. \qquad (2.6.11)$$

2.6.2.3. Bình sai điều kiện

Giả sử phương trình hiệu chỉnh chuẩn hoá cho dưới dạng ma trận

$$\underset{(r,n)}{\hat{A}} \quad \underset{(n,1)}{\hat{V}} + \underset{(r,1)}{W} = \underset{(r,1)}{0} \quad (r \le n) \qquad (2.6.12)$$

Tạo lập ma trận K theo cấu trúc sau

$K =$

	n	1
r	$A \equiv \hat{A}$	$B \equiv W$
n	$C \equiv E$	$D \equiv O$

(2.6.13)

Sau biến đổi theo K - thuật toán nhận được ma trận

$$\tilde{K} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & n & 1 \\ \hline r & \tilde{A} \equiv U_P & \tilde{B} \equiv \tilde{W} \\ \hline n & \tilde{C} \equiv Q_1 & \tilde{D} \equiv \tilde{V} \\ \hline \end{array} \qquad (2.6.14)$$

Thật vậy với trợ giúp của (2.6.3a) nhận được ma trận hình que $\tilde{K}$ biểu thức sau ($\tilde{A} = T^*_P U_P$) :

$$\tilde{A} = T^{*-1}_P \hat{A} = U_P ;$$

$$\tilde{B} = T^{*-1}_P W = \tilde{W};$$

$$\tilde{C} = E - U^*_P U_P = Q_1 ;$$

$$\tilde{D} = -U^*_P \tilde{W} = \hat{V};$$

đúng như trong (2.6.14)

Với sự trợ giúp của K - thuật toán có thể thực hành biến đổi $[\hat{A}W] \rightarrow [\tilde{A}\tilde{W}]$ và tiếp đến tính hiệu chỉnh theo công thức

$$\hat{V} = -\tilde{A} * \tilde{W} .$$

Để thực hiện tính toán này ma trận K cho dạng

$$K = [\hat{A}W] \qquad (2.6.15)$$

Biến đổi (2.6.15) theo K - thuật toán, nhận được

$$\tilde{K} = \left[\tilde{A}\tilde{W}\right] \equiv \left[U_P \tilde{W}\right]. \qquad (2.6.16)$$

Theo cách thứ hai này phần lớn trường làm việc (n + 1)n vị trí được giải phóng, nhưng ma trận hệ số trọng số cho trị bình sai chuẩn hoá không nhận được ngay. Các thành phần của nó được tính theo công thức

$$Q_1 = E - \tilde{A} * \tilde{A} = E - U^*_P U_P . \qquad (2.6.17)$$

Nếu muốn tính thành phần đường chéo Q_{jj}, tức trọng số đảo cho đại lượng bình sai, ta có thể sử dụng từ (2.6.17)

$$(Q_{jj})_{ij} = \frac{1}{P_{ij}} = 1 - \sum_{i=1}^{r} U_{ij}^2 \quad (j = \overline{1,n}) \tag{2.6.18}$$

2.6.3. Bình sai điều kiện với ẩn số như là thuật toán toàn năng để giải bài toán theo phương pháp bình phương tối thiểu

Bài toán chung của bình sai với ẩn số biểu diễn qua phương trình ma trận

$$\underset{(m,n)}{A}\ \underset{(n,1)}{V} + \underset{(m,u)}{B}\ \underset{(u,1)}{X} + \underset{(m,1)}{W} = \underset{(m,1)}{0}\ ; \tag{2.6.19}$$

$$\underset{(1,n)}{V^*}\ \underset{(n,n)}{P}\ \underset{(n,1)}{V} = \min\ . \tag{2.6.20}$$

Chuyển sang hiệu chỉnh chuẩn hoá như đã làm, ta có

$$\hat{A}\hat{V} + BX + W = 0\ ; \tag{2.6.21}$$

$$\hat{V} * \hat{V} = \min\ , \tag{2.6.22}$$

ở đây

$$\hat{V} = P^{1/2}V\ ;\ \hat{A} = AP^{-1/2}\ . \tag{2.6.23}$$

Cách truyền thống giải bài toán xuất phát từ điều kiện tương đương của (2.6.22)

$$\underset{(n,1)}{\hat{V}} = \underset{(n,m)}{\hat{A}^*}\ \underset{(m,1)}{K}\ ; \tag{2.6.24}$$

$$\underset{(u,m)}{B^*}\ \underset{(m,1)}{K} = \underset{(u,1)}{O}\ . \tag{2.6.25}$$

ở đây K là cột của ẩn quan hệ.

Từ (2.6.21) và (2.6.24) nhận được hệ

$$(\hat{A}\hat{A}^*)K + B\,X + W = O\,, \qquad (2.6.26)$$

$$B^*\,K = O\,;$$

ở đây ta thêm vào phương trình (2.6.25).

Phương trình (2.6.26) đối xứng với ẩn số (thành phần của X) và ẩn quan hệ (thành phần của K).

Để giải (2.6.26) xác định K từ phương trình thứ nhất

$$K = -(\hat{A}\hat{A}^*)^{-1}(BX + W) \qquad (2.6.27)$$

và thay vào phương trình thứ hai ta có

$$[B^*(\hat{A}\hat{A}^*)^{-1}B]X + B^*(\hat{A}\hat{A}^*)^{-1}W = 0\,. \qquad (2.6.28)$$

Phương trình (2.6.28) là dạng ma trận của phương trình chuẩn cho ẩn số.

Ta nhận sự phân chia

$$(\hat{A}\hat{A}^*) = T^*T\,, \qquad (2.6.29)$$

ở đây T sẽ là ma trận tam giác trên, thì (2.6.28) xuất hiện dạng

$$(B^*\,T^{-1}\,T^{*-1}B)\,X + B^*\,T^{-1}T^{*-1}W = 0$$

hay cũng là

$$[(T^{*-1}B)^*(T^{*-1}B)]\,X + (T^{*-1}B)^*(T^{*-1}W) = 0. \qquad (2.6.28a)$$

Đưa vào ký hiệu

$$\widetilde{B} = T^{*-1}\,B\,,$$

$$\widetilde{W} = T^{*-1}\,W\,. \qquad (2.6.30)$$

Phương trình (2.6.28a) thay đổi vào dạng

$$(\widetilde{B}^*\widetilde{B})X + \widetilde{B}^*\widetilde{W} = 0\,. \qquad (2.6.28b)$$

Với ma trận hệ số trọng số cho cột W ta có

$$Q_{\tilde{W}} = T^{*-1} Q_W T^{-1} \tag{2.6.31}$$

và vì với bình sai điều kiện

$$Q_W = \hat{A}\hat{A}^*, \tag{2.6.32}$$

thì với (2.6.29) và (2.6.32) ta có

$$Q_{\tilde{W}} = E. \tag{2.6.33}$$

Từ tất cả những trình bày đến đây ta thấy rằng hệ phương trình chuẩn cho ẩn số - phương trình (2.6.28b) có thể có được khi xuất phát từ hương trình hiệu chỉnh biểu diễn qua

$$\underset{(m,1)}{\Delta} = \underset{(m,u)}{\tilde{B}} \quad \underset{(u,1)}{X} + \underset{(m,1)}{\tilde{W}}, \tag{2.6.34}$$

và được giải với điều kiện

$$\Delta^* \Delta = \min. \tag{2.6.35}$$

Nói cách khác, ta đến chỗ bình sai gián tiếp của đại lượng độc lập cùng độ chính xác. Giải bài toán (ví dụ theo thuật toán Banaxiêvich), ta nhận được ẩn số (X), hệ số trọng số cho ẩn số và hiệu chỉnh (Δ). Bây giờ có thể quay về tính ẩn quan hệ (K). Nhằm mục đích này thay (2.6.29) vào (2.6.27) ta nhận được

$$K = -T^{-1}T^{*-1}(BX + W) = -T^{-1}(\tilde{B}X + \tilde{W}) = -T^{-1}\Delta, \tag{2.6.36}$$

ở đây ta sử dụng (2.6.30) và (2.6.34).

Khi thay (2.6.36) vào (2.6.24) ta nhận được

$$\hat{V} = -\hat{A}^* T^{-1} \Delta. \tag{2.6.37}$$

Với ma trận $\hat{A}$ tồn tại phân tích trực giao sau (A không suy biến, ngang (m,n) với $m \leq n$):

$$\hat{A} = T^*_P U_P, \tag{2.6.38}$$

Ở đây $T_P = T$ là ma trận tam giác trên tham gia vào phân tích (2.6.29) và U_P là ma trận cùng loại của $\hat{A}$ với trực giao giữa các hàng với nhau, tức

$$U_P U^*_P = E \tag{2.6.39}$$

Khi thay (2.6.38) vào (2.6.37) nhận được cuối cùng

$$\hat{V} = -U^*_P \Delta . \tag{2.6.40}$$

Từ công thức (2.6.40) trực tiếp suy ra công thức kiểm tra

$$\hat{V} * \hat{V} = \Delta * \Delta . \tag{2.6.41}$$

Quay lại hiệu chỉnh đại lượng đo trực tiếp, tìm được

$$v_j = m_j \hat{v} . \tag{2.6.42}$$

Để đưa ra ma trận hệ số trọng số của đại lượng bình sai $\hat{\tilde{l}}_j = \hat{l}_j + \hat{v}_j$ đi từ phương trình áp dụng cho tất cả các trường hợp của bình sai theo phương pháp bình phương tối thiểu

$$Q_{\hat{l}} = Q_l - Q_v . \tag{2.6.43}$$

phương trình (2.6.43) cũng có hiệu lực với các đại lượng đã chuẩn hoá $\hat{\tilde{l}} = \hat{l} + \hat{v}$, tức là

$$Q_{\hat{\tilde{l}}} = Q_{\tilde{l}} - Q_{\hat{v}} , \tag{2.6.44}$$

với $Q_{\tilde{l}} = E$.

Với Q_v khi để ý đến (2.6.40) nhận được

$$Q_{\hat{v}} = U^*_P Q_\Delta U_P . \tag{2.6.45}$$

Khi sử dụng (2.3.54) có thể viết

$$\Delta = (E - \tilde{B}\tilde{B}^{-1}_{tr.ch})\,\tilde{W} \tag{2.6.46}$$

Ở đây với Q_Δ khi để ý (2.6.33) và đồng nhất đối xứng của $(E - \tilde{B}\tilde{B}^{-1}_{tr.ch})$ tìm được

$$Q_{\lambda} = E - \tilde{B}\tilde{B}^{-1}_{tr.ch} = E - \tilde{B}(\tilde{B}^{*}\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^{*}. \qquad (2.6.47)$$

Khi thay Q_{λ} từ (2.6.47) vào (2.6.45) nhận được

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{V}} &= U^{*}_{P}(E - \tilde{B}(\tilde{B}^{*}\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^{*})U_{P} = \\ &= U^{*}_{P}U_{P} - U^{*}_{P}\tilde{B}(\tilde{B}^{*}\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^{*}U_{P}. \end{aligned} \qquad (2.6.48)$$

Trong (2.6.48) có thể thay (so sánh với (2.3.22))

$$\tilde{B}^{*}\tilde{B} = R^{*}R, \qquad (2.6.49)$$

Ở đây R là ma trận tam giác trên, nó nhận được trong quá trình phân tích tam giác của ma trận hệ số phương trình chuẩn ($B^{*}B$); xuất hiện khi giải (2.6.34) theo thuật toán Banaxiêvich.

Với để ý (2.6.49) công thức (2.6.48) thay đổi vào dạng

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{v}} &= U^{*}_{P}U_{P} - U^{*}_{P}\tilde{B}(R^{*}R)^{-1}\tilde{B}^{*}U_{P} = \\ &= U^{*}_{P}U_{P} - U^{*}_{P}\tilde{B}R^{-1}R^{*-1}\tilde{B}^{*}U_{P} = \\ &= U^{*}_{P}U_{P} - (R^{*-1}\tilde{B}^{*}U_{P})^{*}(R^{*-1}\tilde{B}^{*}U_{P}). \end{aligned} \qquad (2.6.50)$$

Thay $Q_{\tilde{v}}$ từ (2.6.50) vào (2.6.44) nhận được

$$Q_{\hat{1}} = E - U^{*}_{P}U_{P} + (R^{*-1}\tilde{B}^{*}U_{P})^{*}(R^{*-1}\tilde{B}^{*}U_{P}). \qquad (2.6.51)$$

Trong công thức (2.6.51) số hạng thứ ba bên phải phản ánh ảnh hưởng không chính xác của ẩn số trên ma trận hệ số của cột $\hat{1}$. Khi ẩn số tương đối chính xác cao thì số hạng này có thể bỏ qua.

Công thức (2.6.51) có thể biểu diễn ở dạng

$$Q_{\hat{1}} = E - U^{*}_{P}U_{P} + (\hat{B}^{*}U_{P})^{*}(\hat{B}^{*}U_{P}), \qquad (2.6.51a)$$

ở đây sử dụng ký hiệu

$$\hat{B} = \tilde{B}R^{-1}.$$

Với máy tính thì ma trận $\hat{B}$ có thể ghi chỗ của $\tilde{B}$.

Khi biết ma trận hệ số trọng số của trị bình sai chuẩn hoá $\hat{\bar{l}}$ thì dễ dàng nhận được ma trận hệ số trọng số của trị chưa chuẩn hoá $\bar{l}$. Khi sử dụng

$$\bar{l} = P^{-1/2}\hat{\bar{l}} \tag{2.6.52}$$

Ở đây P là ma trận đường chéo của trọng số đo; ta nhận được

$$Q_{\bar{l}} = P^{-1/2}Q_{\hat{\bar{l}}}P^{-1/2}. \tag{2.6.53}$$

Khi có mục đích tính trọng số đảo $\frac{1}{P_{\bar{l}}}$ của trị bình sai, thì không cần thiết phải tính tất cả thành phần của $Q_{\bar{l}}$, tương ứng $Q_{\hat{\bar{l}}}$. Ta chỉ cần tính thành phần của đường chéo là đủ. Ta có trong sự tương ứng (2.6.51a) và (2.6.53)

$$\frac{1}{P_{\hat{\bar{l}}}} = (Q_{\hat{\bar{l}}})_{jj} = 1 - \sum_{i=1}^{m} u_{ij}^2 + \sum_{k=1}^{m}(\sum_{i=1}^{m} u_{ij}.\hat{B}_{ik})^2; \tag{2.6.54}$$

$$\frac{1}{P_{\bar{l}_j}} = \frac{1}{P_{l_j}}(Q_{\hat{\bar{l}}})_{jj}. \tag{2.6.55}$$

Khi chú ý rằng

$$P_{l_j} = \frac{1}{m_j^2},$$

công thức (2.6.55) có thể biểu diễn dưới dạng

$$m_{\bar{l}_j} = m_j\sqrt{(Q_{\hat{\bar{l}}})_{jj}} = m_j\sqrt{\frac{1}{P_{\hat{\bar{l}}_j}}}. \tag{2.6.57}$$

Thuật toán đã trình bày nói lên rằng lời giải bài toán bình sai điều kiện với ẩn số bao gồm bình sai điều kiện và bình sai gián tiếp. Tính đặc biệt này của thuật toán cho phép thành lập một chương trình toàn năng để giải bài toán bình sai điều kiện với ẩn số, cũng như bình sai điều kiện thông thường và bình sai gián tiếp. Cũng ngay bây giờ phải đánh dấu rằng thành lập cái

gọi là chương trình "nhiều có thể" không thích hợp về phương diện áp dụng. Thích hợp thực tế là thành lập chương trình "ít có thể", bởi vì tối ưu trong chương trình. Nhưng thuật toán trình bày với một vài bổ sung nhỏ có thể đảm bảo để lập trình để giải một phạm vi lớn các bài toán trong đo đạc. Mặt khác việc thành lập chương trình thuật toán này là những ví dụ rất tốt cho đào tạo vì vậy sau đây sẽ thành lập chương trình với đa dụng.

2.6.3.1. Chương trình giải bài toán tổng quát của phương pháp bình phương tối thiểu

Ở hình 2.6.4 trình bày sơ đồ khối giải bài toán bình sai điều kiện với ẩn số với cả khả năng giải bài toán bình sai điều kiện bình thường và bài toán bình sai gián tiếp.

Trong sơ đồ khối và trong chương trình đưa vào các ký hiệu sau (Tên biến):

K - mảng hai chiều, trong đó ghi ma trận

$$\underset{(M,N+U+1)}{K} = [\ \underset{(M,N)}{A}\quad \underset{(M,U)}{B}\quad \underset{(M,1)}{W}\ ]; \tag{2.6.58}$$

M, N, U - kích thước ma trận que trong K ;

KIJ - nhân tố thành phần khác không của K, nằm ở hàng thứ i và cột thứ J ($I = \overline{1,M}$; $J = \overline{1,N-U-1}$);

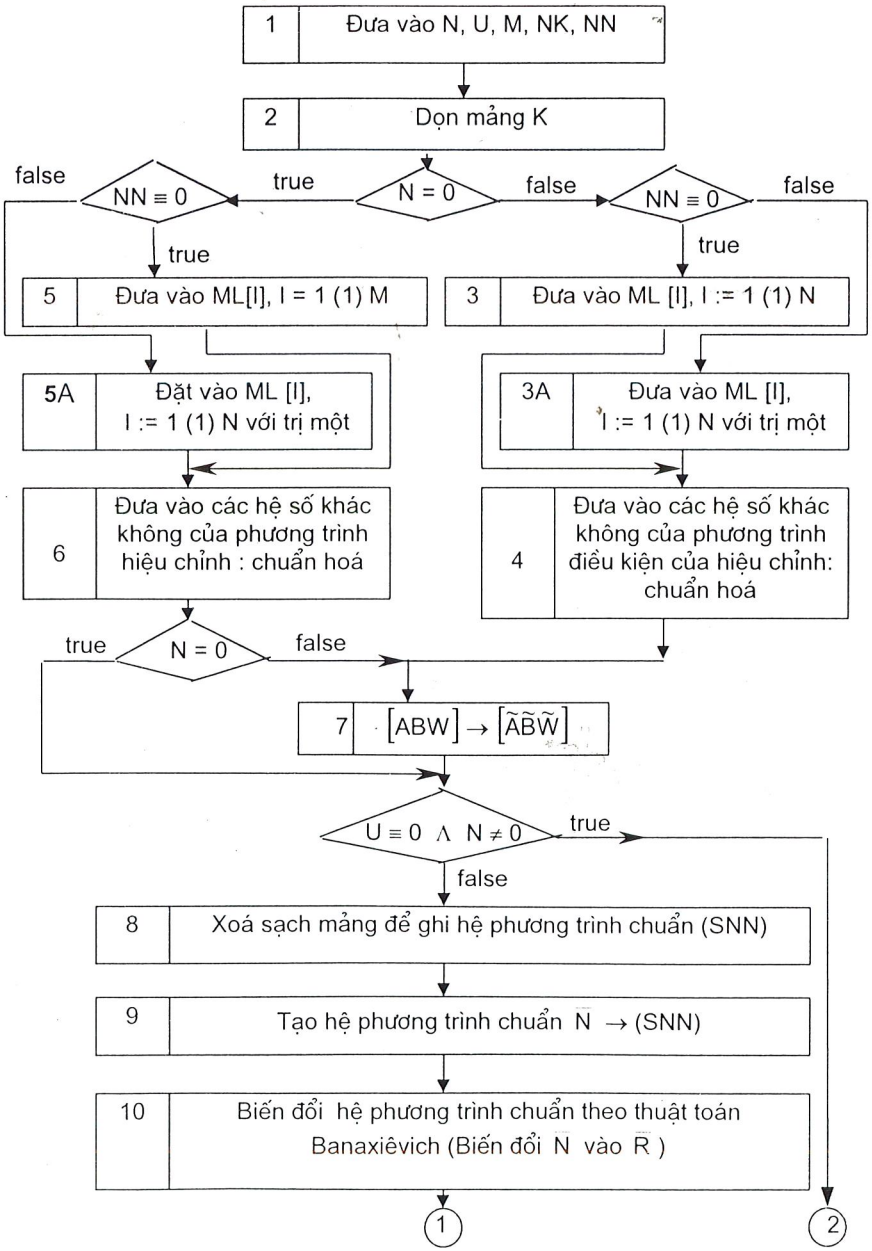
NK - số phần tử khác không trong ma trận K;

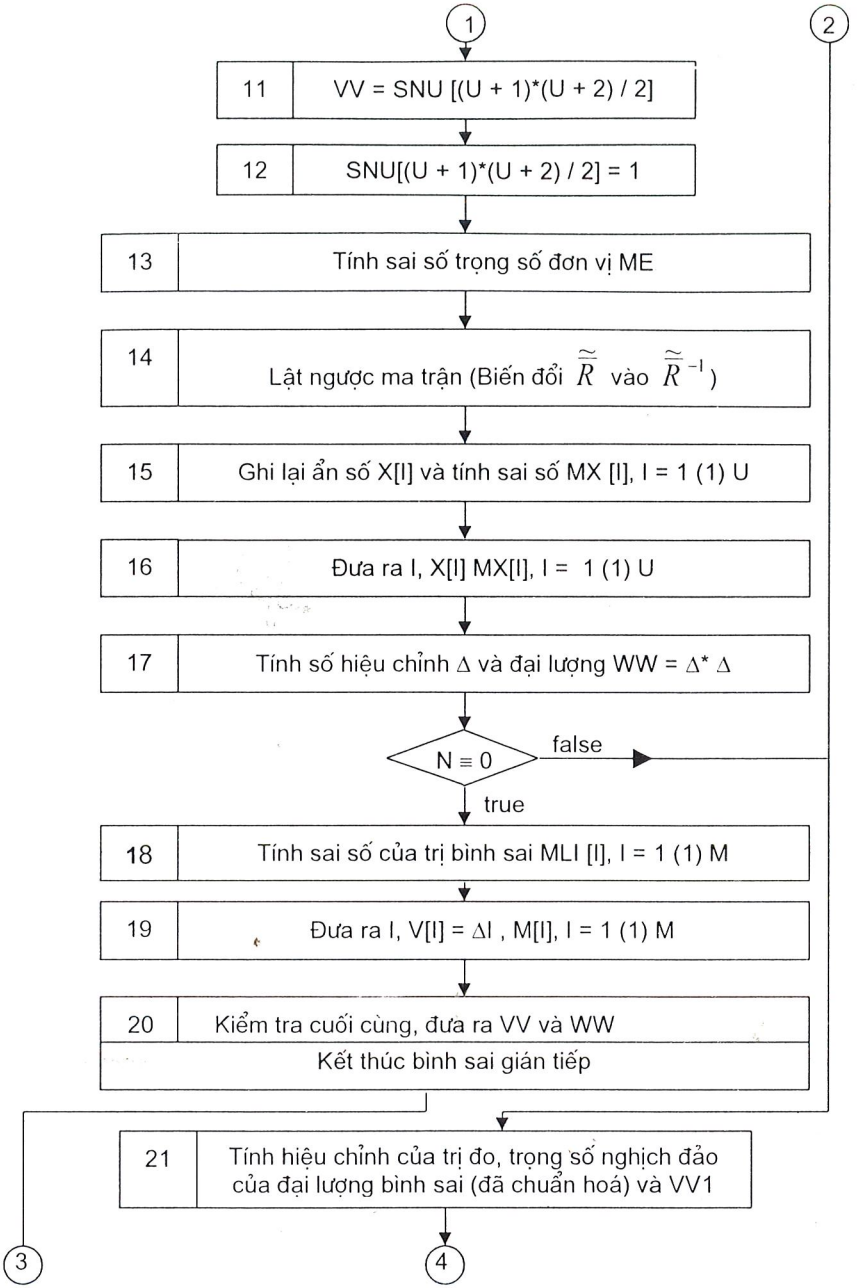
NN - dấu hiệu: với NN = 0 sai số trung phương các đại lượng đo sẽ đưa vào máy, còn NN ≠ 0 sai số đo như nhau, trọng số nhận giá trị 1;

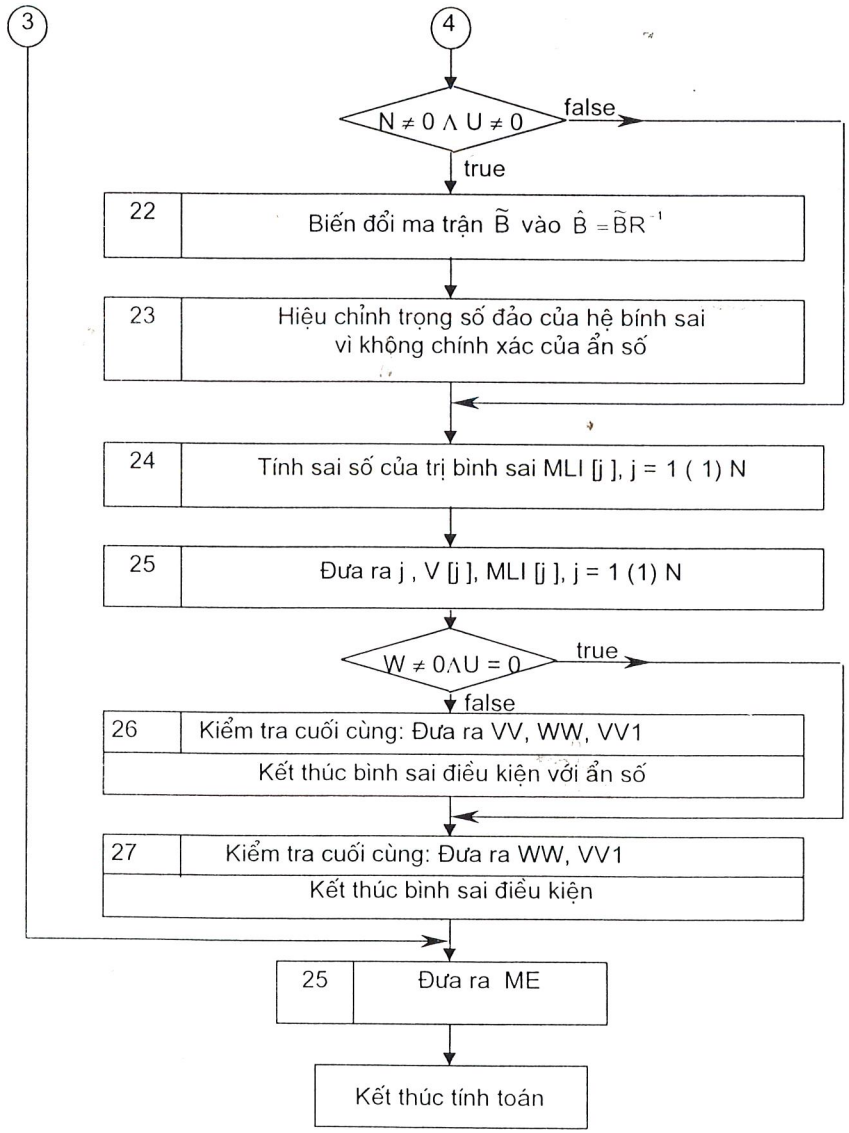
SNU - mảng một chiều, trong đó ghi hệ số với số hạng tự do của hệ phương trình chuẩn ($\overline{N}$), thành phần N, ghi ở vị trí

$$IJ = (I - 1)(2(u + 1) - i)/2 + J\ . \tag{2.6.59}$$

ở đây u là số ẩn số (cột của ma trận B) ;


1
Đưa vào N, U, M, NK, NN
2
Dọn mảng K
N = 0
true
false
NN ≡ 0
true
false
NN ≡ 0
true
false
5
Đưa vào ML[I], I = 1 (1) M
3
Đưa vào ML [I], I := 1 (1) N
5A
Đặt vào ML [I],
I := 1 (1) N với trị một
3A
Đưa vào ML [I],
I := 1 (1) N với trị một
6
Đưa vào các hệ số khác không của phương trình hiệu chỉnh : chuẩn hoá
4
Đưa vào các hệ số khác không của phương trình điều kiện của hiệu chỉnh: chuẩn hoá
N = 0
true
false
7
[ABW] → [ÃB̃W̃]
U ≡ 0 ∧ N ≠ 0
true
false
8
Xoá sạch mảng để ghi hệ phương trình chuẩn (SNN)
9
Tạo hệ phương trình chuẩn N̄ → (SNN)
10
Biến đổi hệ phương trình chuẩn theo thuật toán Banaxiêvich (Biến đổi N̄ vào R̄)
1
2


1
2
11
VV = SNU [(U + 1)*(U + 2) / 2]
12
SNU[(U + 1)*(U + 2) / 2] = 1
13
Tính sai số trọng số đơn vị ME
14
Lật ngược ma trận (Biến đổi $\widetilde{\widetilde{R}}$ vào $\widetilde{\widetilde{R}}^{-1}$)
15
Ghi lại ẩn số X[I] và tính sai số MX [I], I = 1 (1) U
16
Đưa ra I, X[I] MX[I], I = 1 (1) U
17
Tính số hiệu chỉnh Δ và đại lượng WW = Δ* Δ
N ≡ 0
false
true
18
Tính sai số của trị bình sai MLI [I], I = 1 (1) M
19
Đưa ra I, V[I] = ΔI , M[I], I = 1 (1) M
20
Kiểm tra cuối cùng, đưa ra VV và WW
Kết thúc bình sai gián tiếp
21
Tính hiệu chỉnh của trị đo, trọng số nghịch đảo của đại lượng bình sai (đã chuẩn hoá) và VV1
3
4



Hình 2.6.4. Sơ đồ khối của chương trình giải bài toán bình sai điều kiện với ẩn số phụ vào trường hợp riêng bình sai điều kiện và gián tiếp.

A - mảng một chiều, trong đó ghi hàng hiện thời của $[\widetilde{B}\widetilde{W}]$ được sử dụng trong tạo hệ phương trình chuẩn;

ML - mảng một chiều trong đó ghi sai số trung phương của đại lượng bình sai (đại lượng đo);

MLI - mảng một chiều, trong đó ghi sai số trung phương trị bình sai (mảng ML và MLI cùng độ dài);

VV - tổng bình phương của hiệu chỉnh chuẩn hoá;

ME - sai số trung phương trọng số đơn vị;

WW - tổng bình phương hiệu chỉnh giả định (tổng kiểm tra)

VV1 - tổng kiểm tra của bình phương hiệu chỉnh chuẩn hoá;

V - mảng một chiều trong đó ghi hiệu chỉnh chuẩn hoá, và sau đó ghi hiệu chỉnh.

Trong sơ đồ khối ở hình 2.6.4 mô tả quá trình tính, trong đó cho phép giải ba bài toán chuẩn theo phương pháp bình phương tối thiểu:

Bình sai với ẩn số (với $N > 0$ và $U > 0$; $U < M < N$);

Bình sai gián tiếp (với $U > 0$ và $N = 0$; $U < M$);

Bình sai điều kiện (với $N > 0$ và $U = 0$; $0 < M < N$).

Đồng thời cũng có thể giải hệ phương trình đại số (với $M = N$ và $U = 0$).

Thực trạng một bài toán chuyển qua dạng bài toán khác thông qua dấu hiệu không của một trong hai tham số N và U (hình 2.6.4), cho phép mảng K dùng như tổng thể. Ví dụ bình sai gián tiếp trong mảng K ghi phương trình hiệu chỉnh, còn bình sai điều kiện - phương trình điều kiện.

Để rõ hơn quá trình tính toán, dưới dạng mô tả ngắn gọn các khối tính toán (khối vào ra không cần giải thích gì thêm).

Với một vài bloc cùng với chi tiết tính toán và kèm đồ hình.

Bloc 4. Đưa vào các thành phần khác không của ma trận K và số của hàng I và cột J, ở đấy chứa thành phần KIJ. Đồng thời đưa phương trình điều kiện về hiệu chỉnh chuẩn hoá (so sánh với (2.6.23) với $P_j = \frac{1}{m_j^2}$).

Bloc 6. Đưa vào phương trình hiệu chỉnh (bình sai gián tiếp) và đưa về trọng số 1 hiệu chỉnh chuẩn hoá; so sánh với (2.3.51).

Bloc 7. Biến đổi ma trận K theo K- thuật toán công thức (2.6.2) với t = 0 và s = u + 1).

Bloc 9. Thành lập hệ phương trình chuẩn (N) và ghi vào mảng một chiều SNU:

$$\overline{N}_{ij} \rightarrow \text{SNU (ij)};\ i \le j,\ ij = (i\text{-}1)(2u+2\text{-}i)/2+j\ ;$$

$$\overline{N} = \left[\tilde{B}\tilde{W}\right] * \left[\tilde{B}\tilde{W}\right] = \begin{bmatrix} \tilde{B} * \tilde{B} & \tilde{B} * \tilde{W} \\ \tilde{W} * \tilde{B} & \tilde{W} * \tilde{W} \end{bmatrix}. \qquad (2.6.60)$$

so sánh (2.6.60) với (2.6.28b).

Công thức tính $\overline{N}_{ij}$ là:

$$\overline{N}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{\tilde{B}}_{ik} \tilde{\tilde{B}}_{jk} \qquad (2.6.61)$$

với $i, j = \overline{1, u+1}$ $(i \le j)$;

$$\tilde{\tilde{B}} = \left[\tilde{B}\tilde{W}\right]$$

Tổng bên phải (2.6.61) có thể nhận qua cộng dồn như đã làm ở 2.3.1.1. Với mục đích này có thể thích hợp hơn khi hàng hiện thời của $\tilde{\tilde{B}}$ chuyển về mảng một chiều A.

Bloc 9 ÷ 16. Mô tả áp dụng thuật toán Banaxiêvich (so sánh với tiết 2.3.1.1).

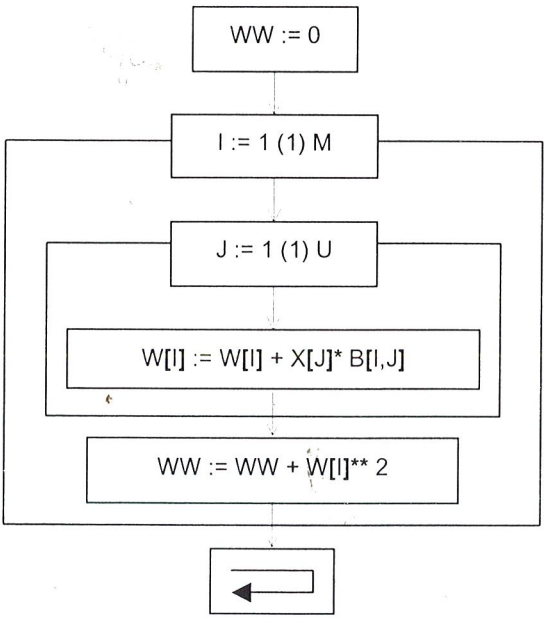
Bloc 17. Trị hiệu chỉnh giả định

$$\underset{(M,1)}{\Delta} = \underset{(M,U)}{\widetilde{B}} \; \underset{(U,1)}{X} + \underset{(M,1)}{\widetilde{W}}$$

và ghi Δ_i vào chỗ w_i $(i = \overline{1,u})$

$$\Delta^* \Delta \rightarrow WW$$

Nếu nhận rằng ma trận $\underset{(M,U)}{\widetilde{B}}$ ghi ở mảng hai chiều ở B, cột $\widetilde{W}$ ghi ở mảng một chiều W, còn X - ở mảng một chiều X trong bloc 17 có thể thành lập đồ hình như ở hình 2.6.5.



Hình 2.6.5

Bloc 18. Tính sai số trung phương trước hết cho trị bình sai chuẩn hoá và tiếp đến cho trị bình sai chưa chuẩn hoá

$$\hat{\tilde{l}} = \hat{l} + \hat{v} = \hat{B}X + \hat{l}_0; \qquad (2.6.62)$$

$$Q_{\hat{\tilde{l}}} = \hat{B}Q_X\hat{B}^* = \hat{B}(R^* R)^{-1}\hat{B}^* = (\hat{B}R^{-1})(\hat{B}R^{-1})^* \qquad (2.6.63)$$

Vì vậy

$$(Q_{\hat{\tilde{l}}})_{ii} = \frac{1}{P_{\hat{\tilde{l}}_i}} = \sum_{j=1}^{u}(\sum_{k=1}^{j}\hat{B}_{ik}R^{kj})^2 . \qquad (2.6.64)$$

Trong công thức (2.6.64) với R^{kj} ký hiệu phần tử của ma trận tam giác R^{-1}.

Nếu $\hat{B}$ ghi ở mảng hai chiều B, $B_{ik} \rightarrow B[i.k]$ và ma trận tam giác trên R^{-1} ghi ở mảng một chiều R, $R^{kj} \rightarrow R[KJ]$ với KJ = (K-1)(2(u+1)-K)/2+J và thành phần đường chéo của Q_l ghi trong mảng một chiều QL lúc đo tính theo công thức (2.6.46) có thể biểu diễn qua đồ hình hình 2.6.6.

Bloc 21. Tính hiệu chỉnh trong trường hợp bình sai ẩn số hay bình sai điều kiện thông thường, thực hiện theo công thức

$$V = -\tilde{A} * \Delta, \qquad (2.6.65)$$

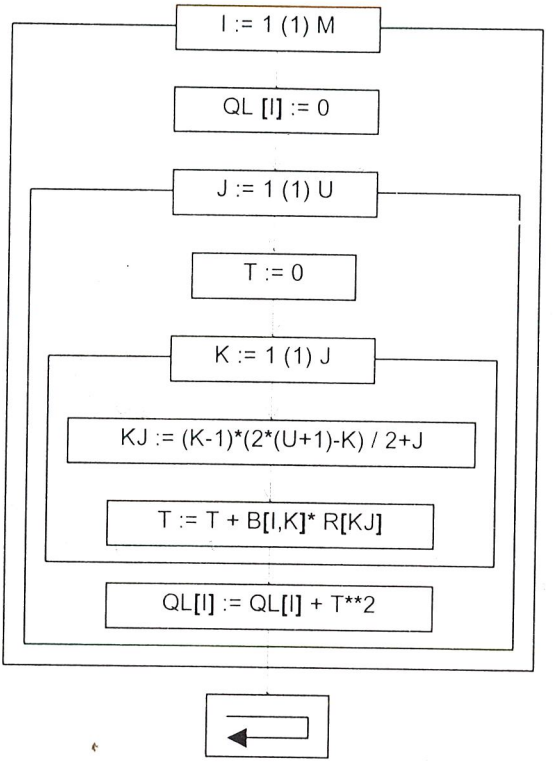
Ở đây $\Delta = \tilde{B}X + \tilde{W}$ cho trường hợp bình sai điều kiện với ẩn số hay $\Delta = \tilde{W}$ cho trường hợp bình sai điều kiện bình thường.

Công thức tính là

$$V_j = -\sum_{i=1}^{m}\tilde{A}_{ij}\Delta_i . \qquad (2.6.66)$$

Cùng với điều này cũng tính luôn trọng số đảo của đại lượng bình sai, nhưng chỉ đúng với điều kiện bình thường, tức không lấy số hạng thứ ba trong công thức (2.6.54).

Bloc 22. Thực hiện tính ma trận $\tilde{\tilde{B}} = \tilde{B}.R^{-1}$, cần thiết phải dẫn ra ảnh hưởng của không chính xác của ẩn số (trong trường hợp bình sai với điều kiện với ẩn số).



Hình 2.6.6

Khi đó từ quy tắc nhân hai ma trận, với thành phần của $\tilde{\tilde{B}}$ ta có

$$\tilde{\tilde{B}}_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \tilde{B}_{ik} R^{kj}. \qquad (2.6.67)$$

$$(i = \overline{1, M}\,;\, j = \overline{1, U})$$

Để có thể ma trận $\hat{\tilde{B}}$ ghi trên chỗ của ma trận $\tilde{B}$, việc tính toán bắt đầu từ thành phần cuối cùng của hàng cuối cùng của $\tilde{B}$, tức tính theo công thức (2.6.67) cần thực hiện theo tuần tự

$$i = M, M-1, \ldots, 1;$$

$$j = U, U-1, \ldots, 1.$$

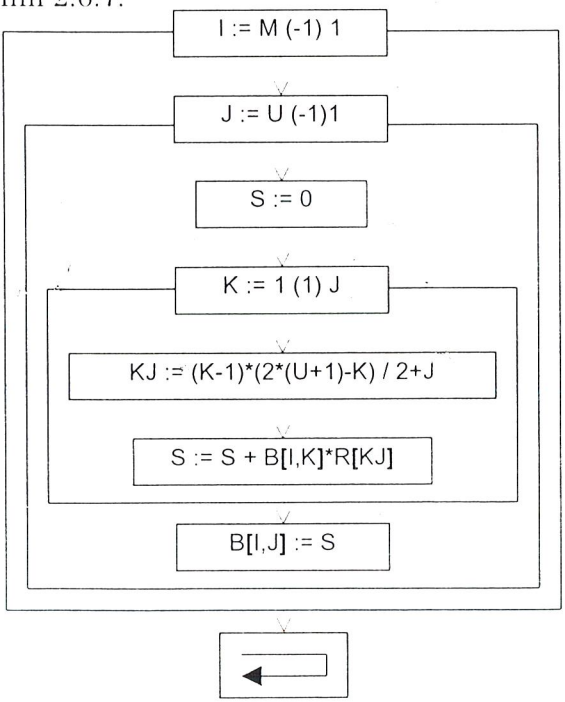
Nếu nhận rằng ma trận $\tilde{B}$ ghi ở mảng hai chiều B, còn ma trận tam giác trên R^{-1} - ở mảng một chiều R, như thế là

$$R^{ki} \rightarrow R[KJ]$$

với

$$KJ = (K-1)(2(U+1)-K)/2+J .$$

Biến đổi $\tilde{B}$ vào $\hat{\tilde{B}}$ có thể thực hiện như chỉ trong đồ hình trình bày ở hình 2.6.7.



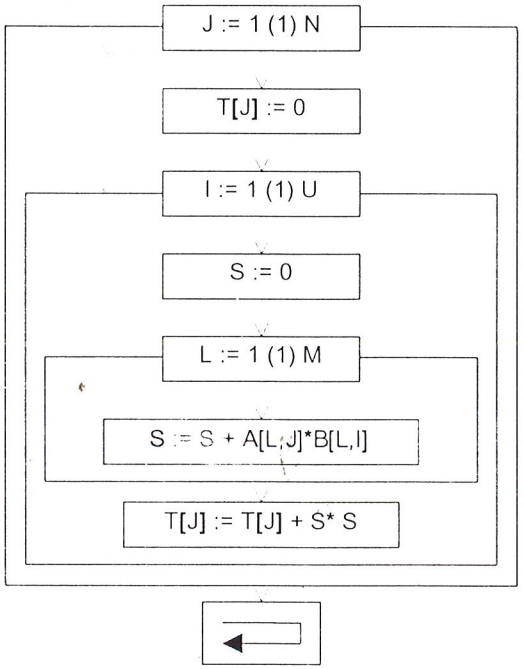
Hình 2.6.7

Bloc 23. Đưa vào cải chính cho trọng số đảo của trị bình sai chuẩn hoá vì có số hạng thứ ba trong (2.6.54). Cải chính được tính theo công thức

$$T_j = \sum_{l=1}^{u} (\sum_{l=1}^{M} \tilde{A}_{lj} \hat{\tilde{B}}_{li})^2 \ , \quad j = \overline{1,N} \ . \qquad (2.6.68)$$

ở đây $\tilde{A}_{lj}$ là thành phần của ma trận trực giao $\tilde{A} = U_p$. $\hat{\tilde{B}}_{li}$ là thành phần của ma trận $\hat{\tilde{B}}$ nhận được trong bloc 22.

Nếu nhận ma trận $\tilde{A}$ ghi ở mảng hai chiều A, có $A_{li} \rightarrow A[l, j]$ $\hat{\tilde{B}}$ ghi ở mảng hai chiều B, có $\hat{\tilde{B}}_{li} \rightarrow B[l, i]$ và phần tử T_j muốn ở trong mảng một chiều T : $T_j \rightarrow T[j]$: khi đó đồ hình tính T_j ($j = \overline{1,N}$) có thể biểu diễn ở dạng cho ở hình 2.6.8



Hình 2.6.8

Bloc 24. Từ trọng số đảo của trị bình sai chuẩn hoá tính sai số trung phương của trị bình sai (chưa chuẩn hoá). Sử dụng công thức

$$m_{l_j} = m_{l_j} m_c \sqrt{\frac{1}{P_{l_j}}},$$

Ở đây m_c là sai số trọng số đơn vị, m_{l_j} là sai số trung phương đại lượng đo l_j, còn P_{l_j} là trọng số đảo của trị bình sai chuẩn hoá $\hat{\hat{l}}_j = \hat{l}_j + \hat{v}_j$.

Bloc 20, 26 và 27. Đó là việc làm "sigma kiểm tra".

Việc kiểm tra sự đúng đắn của chương trình cần phải nằm trong độ chính xác tính toán.

2.6.3.2. Lược đồ chương trình

Sử dụng các chương trình con trong một hay nhiều chương trình có những ưu việt quan trọng sau:

1. Cùng một chương trình con có thể sử dụng cho một vài chương trình.

2. Kiểm tra chương trình được dễ hơn.

3. Sơ đồ lôgic sáng sủa, rõ dàng hơn.

Bên cạnh đó cũng có những điều không tiện. Ví dụ như có thể gây không hợp lý và thực chất làm dài chương trình ra, quá trình tính toán sẽ chậm hơn.

Mặc dù vậy chương trình con có những ưu việt nên đã được các nhà lập trình sử dụng.

Trong ví dụ trình bày sau đây ta sử dụng các chương trình con sau:

Z101 - thuật toán K;

Z102 - khử rút gọn hệ phương trình chuẩn theo thuật toán Banaxiêvich;

Z103 - lật ngược ma trận;

Z104 - thành lập hệ phương trình chuẩn;

Z105 - tính sai số trung phương của ẩn số;

Z106 - tính hiệu chỉnh trường hợp bình sai điều kiện với ẩn số.

Những chương trình con trên có thể áp dụng cho thành lập một loạt các chương trình khác nhau.

2.7. THUẬT TOÁN GIẢI HỆ THỐNG LƯỚI ĐO ĐẠC LỚN

Những thuật toán được xem xét trong tiết 2.3 về bình sai chủ yếu được áp dụng với tất cả trường làm việc nằm hết trong bộ nhớ trong của máy tính. Khi trường làm việc vượt khỏi phạm vi chứa trong máy, những thuật toán ở tiết 2.3 không phù hợp nữa. Khi đó phải tìm đến phương pháp đa nhóm để bình sai hay áp dụng thuật toán co lại. Thực chất là giảm số chương trình của hệ xuất phát hay tiền xử lý khử bớt ẩn số.

Những khó khăn về bộ nhớ có thể khắc phục nhờ những cấu hình mang thông tin, như vậy hệ phương trình chung được đưa vào tuần tự trong quá trình xử lý.

Điều mà ta quan tâm là phương pháp giải hệ trắc địa lớn. Ta hạn chế chỉ xem xét giải hệ phương trình hiệu chỉnh lớn (bình sai gián tiếp) như đã lưu ý ở tiết 2.5, việc tự động hoá thành lập phương trình điều kiện và những thông tin phụ trong một số trường hợp rất khó khăn. Nó đòi hỏi quá nhiều công sức

và làm cho việc tự động hoá trong bình sai điều kiện khó khăn ra nhiều.

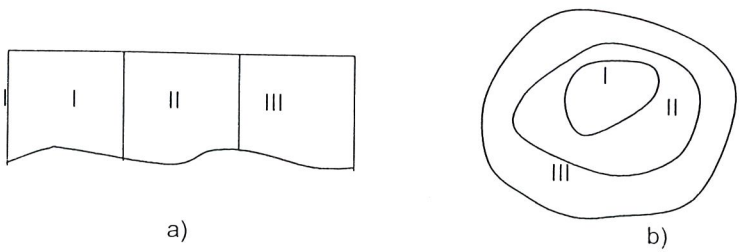
2.7.1. Giải mạng trắc địa lớn theo phương pháp tăng trưởng

Vấn đề giải những mạng trắc địa lớn với kỹ thuật tính toán trên máy tính thời nay có ý nghĩa quan trọng đặc biệt. Việc khai thác mạng trắc địa lớn làm tăng hiệu quả quy trình bộ máy toán trắc địa - phương pháp bình phương tối thiểu - mặt khác gián tiếp tăng độ chính xác xây dựng lưới trắc địa.

Trên thế giới, các loại tài liệu và rất nhiều phương pháp được đưa ra để tính cho mạng trắc địa lớn, thuận tiện cho lập trình, tối ưu, kiểm tra sự đảm bảo cho tự động hoá, v.v..

Trong tiết này trình bày ngắn phương pháp tăng trưởng, do nhà trắc địa người Bungari đề nghị - giáo sư G.Zlatanov.

Phương pháp tăng trưởng được đưa ra với quan điểm tuần tự nhảy lên phần mới của mạng trắc địa bình sai. Nó cũng thuận tiện cho quá trình tự động hoá tính toán bằng máy tính.



Hình 2.7.1

Nhằm mục đích này phương trình hiệu chỉnh được chia ra nhóm, sao cho trong mỗi nhóm tham gia một phần các ẩn độc

lập và các ẩn, kết nối nhóm tương ứng chuyển tiếp tiếp theo. Giả sử phương trình hiệu chỉnh thuộc nhóm thứ nhất trong mạng, cho ở hình 2.7.1 có thể biểu diễn ở dạng sau

$$V_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_{12} + F_1 \qquad (2.7.1)$$

với: V_1 - ma trận cột hiệu chỉnh trong nhóm I;

X_1 - cột ẩn độc lập thuộc nhóm I;

X_{12} - cột ẩn, nối kết nhóm I và nhóm II;

A_{11}, A_{12} - ma trận hệ số phương trình hiệu chiệu chỉnh;

F_1 - cột số hạng tự do;

Giả sử phương trình (2.7.1) đã chuẩn hoá và ta sẽ quan sát quá trình tính toán theo phương pháp tăng trưởng (không chứng minh).

1. Thành lập hệ phương trình chuẩn cho nhóm thứ nhất, biểu diễn như sau

$$\overline{N}_1 = \begin{bmatrix} A^*_{11}A_{11} & A^*_{11}A_{12} & A^*_{11}F_1 \\ A^*_{12}A_{11} & A^*_{12}A_{12} & A^*_{12}F_1 \end{bmatrix} \qquad (2.7.2)$$

2. Khử rút gọn $\overline{N}_1$ theo thuật toán Banaxiêvich nhận được ma trận

$$\overline{R}_1 = \begin{bmatrix} R^I_{11} & R^I_{12} & \rho^I_1 \\ \cdot & r_{12} & \rho_{12} \end{bmatrix}, \qquad (2.7.3)$$

và tương ứng hệ sau

$$R^I_{11}X^I_1 + R^I_{12}X^I_{12} + \rho^I_1 = 0\,,$$

$$r_{12}X^I_{12} + \rho_{12} = 0\,. \qquad (2.7.3a)$$

Nếu các ẩn tương ứng với hệ (2.7.3a) còn lớn đang kể theo trị tuyệt đối: điều đó có nghĩa là việc tuyến tính hoá phương trình đo chưa đúng. Khi đó với các ẩn nhận được sửa lại ẩn số

(cộng vào), sau đó lập lại hệ phương trình hiệu chỉnh nhóm một và thành lập hệ phương trình chuẩn (2.7.2), tương ứng hệ phương trình khử rút gọn (2.7.3), quá trình này giảm dần trị tuyệt đối của ẩn số cho đến lúc nhận được những giá trị thoả mãn điều kiện dạng

$$\frac{1}{m_1}\left(X_1^{l*}X_1^{l} + X_{12}^{l*}X_{12}^{l*}\right) \le \varepsilon \ , \qquad (2.7.4)$$

ở đây ε là số dương thích hợp, còn m_1 là số ẩn của nhóm một.

3. Cùng trị các ẩn số liên kết đã cải chính $X^{0}_{12} + X^{l}_{12}$ và trị ban đầu (gần đúng) của các ẩn còn lại $X^{0}_{2} + X^{0}_{23}$ của nhóm II thành lập hệ phương trình hiệu chỉnh nhóm II, viết được dưới dạng

$$V_2 = A_{21}\Delta X_{12} + A_{22}X_2 + A_{23}X_{23} + F_2 \ . \qquad (2.7.5)$$

và đây ta cho rằng phương trình (2.7.5) cũng đã chuẩn hoá (phương trình đưa về trọng số là đơn vị).

Trong lý thuyết của phương pháp tăng trưởng chứng minh rằng, giải hệ

$$V_2 = A_{21}\Delta X_{12} + A_{22}X_2 + A_{23}X_{23} + F_2 \ . \qquad (2.7.6)$$

$$\delta_{12} = r_{12}\Delta X_{12} \ .$$

với điều kiện $V^{*}_{2}V_2 + \delta^{*}_{12}\delta_{12} = \min \qquad (2.7.6a)$

dẫn đến cũng cùng ẩn số, mà nhận được từ giải hệ

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{11}X_1 + A_{12}X_{12} + F_1 \\ V_2 &= A_{21}X_{12} + A_{22}X_2 + A_{23}X_{23} + F_2 \end{aligned} \qquad (2.7.7)$$

với điều kiện

$$V^{*}_{1}V_1 + V^{*}_{2}V_2 = \min.$$

Điều đó nói lên rằng việc đưa vào phương trình

$$\delta_{12} = r_{12}\Delta X_{12}$$

vào hệ phương trình hiệu chỉnh nhóm II làm kết nối các phương trình của nhóm I và nhóm II.

4. Xuất phát từ hệ tương đương (2.7.6) tạo phương trình chuẩn mở rộng cho nhóm II

$$\overline{N}_2 = \begin{pmatrix} (A^*_{21}A_{21} + r^*_{12}r_{12}) & A^*_{21}A_{22} & A^*_{21}A_{23} & A^*_{21}F_2 \\ A^*_{22}A_{21} & A^*_{22}A_{22} & A^*_{22}A_{23} & A^*_{22}F_2 \\ A^*_{23}A_{21} & A^*_{23}A_{22} & A^*_{23}A_{23} & A^*_{23}F_2 \end{pmatrix} \qquad (2.7.8)$$

5. Ma trận (2.7.8) biến đổi theo thuật toán Banaxiêvich, kết quả nhận được ma trận:

$$\overline{R}_2 = \begin{pmatrix} R^{II}_{11} & R^{II}_{12} & R^{II}_{13} & \rho^{II}_1 \\ & R^{II}_{22} & R^{II}_{23} & \rho^{II}_2 \\ & & r_{23} & \rho_{23} \end{pmatrix}. \qquad (2.7.9)$$

Ma trận $\overline{R}_2$ tương ứng với hệ rút gọn sau

$$\begin{aligned} R^{II}_{11}\Delta X^I_{12} + R^{II}_{12}X^I_{22} + R^{II}_{13}X^I_{23} + \rho^{II}_1 &= 0, \\ R^{II}_{22}X^I_{22} + R^{II}_{23}X^I_{23} + \rho^{II}_2 &= 0, \\ r_{23}X^I_{23} + \rho_{23} &= 0. \end{aligned} \qquad (2.7.9a)$$

Nếu các ẩn nhận từ giải (2.7.9a) mà lớn, trị gần đúng của $X^{(I)}_{22}$ và $X^{(I)}_{23}$ được hiệu chỉnh lại; thành lập mới phương trình thứ nhất (2.7.6) và ma trận (2.7.8), biến đổi nó theo thuật toán Banaxiêvich để nhận (2.7.9), tương ứng trị gần đúng mới của ẩn $X^{(II)}_{22}$ và $X^{(II)}_{23}$. Quá trình này tuần tự giảm trị của ẩn X^I_{22} và X^I_{23} tiếp tục đến khi thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{m_2}(\Delta X^{I*}_{12}\Delta X^I_{12} + X^{I*}_{22}X^I_{22} + X^{I*}_{23}X^I_{23}) \le \varepsilon. \qquad (2.7.10)$$

6. Bước tiếp giải nhóm thứ ba. Nhằm mục đích này với trị đã có cải biến của các ẩn liên kết $(X^0_{23} + X_{23})^I$ và trị của các ẩn X^0_{33} thành lập phương trình hiệu chỉnh chuẩn hoá thuộc nhóm ba

$$V_3 = A_{32}\Delta X_{23} + A_{33}X_3 + F_3 \qquad (2.7.11)$$

Hệ này giải cùng với hệ kết nối

$$\delta_{23} = r_{23}\Delta X_{23} \qquad (2.7.11a)$$

với điều kiện

$$V^*_3 V_3 + \delta^*_{23}\delta_{23} = \min . \qquad (2.7.12)$$

Nói cách khác, phương trình (2.7.11) và (2.7.11a) giải đồng thời theo phương pháp bình phương tối thiểu. Khi theo dõi thuật toán Banaxiêvich, ta cần tạo ma trận mở rộng của hệ phương trình chuẩn

$$\overline{N}_3 = \begin{bmatrix} (A^*_{32} A_{32} + r^*_{23} r_{23}) & A^*_{32} A_{33} & A^*_{32} F_3 \\ A^*_{33} A_{32} & A^*_{33} A_{33} & A^*_{33} F_3 \end{bmatrix}. \qquad (2.7.13)$$

sau khi biến đổi vào dạng tam giác

$$\overline{R}_3 = \begin{bmatrix} R^{III}_{11} & R^{III}_{12} & \rho^{III}_1 \\ & R^{III}_{22} & \rho^{III}_2 \end{bmatrix}. \qquad (2.7.14)$$

Ma trận R_3 tương ứng với hệ phương trình khử sau

$$R^{III}_{11}\Delta X^I_{23} + R^{III}_{12}X^I_{33} + \rho^{III}_1 = 0 ,$$
$$R^{III}_{22}X_{33} + \rho^{III}_2 = 0 . \qquad (2.7.15)$$

Nếu

$$\frac{1}{m_3}(X^{*I}_{23}X^I_{23} + X^{*I}_{33}X^I_{33}) \le \varepsilon ,$$

thì lời giải (2.7.15) sẽ là trị ẩn cuối cùng nhận được. Trường hợp ngược lại trị gần đúng X^0_{33} lại hiệu chỉnh, đặt $X^{0I}_{33} = X^0_{33} + X^I_{33}$ và phương trình (2.7.11) tạo lập mới; thành lập hệ mới N_3; biến

đổi theo thuật toán Banaxiêvich: dẫn đến hệ rút gọn $\overline{R}_3$. Quá trình này tuần tự giảm đại lượng ẩn X^{I}_{33} đến khi điều kiện chính xác lời giải thoả mãn.

Con đường tính trình bày này có thể hiện thực hoá ra. Ví dụ biểu thức $(r^*_{12}r_{12})$ ở (2.7.8), tương ứng $(r^*_{23}r_{23})$ ở (2.7.13) có thể nhận được với khử dần hệ phương trình chuẩn (khử ẩn). Thật vậy, nếu khử tuần tự ẩn số của hệ phương trình chuẩn, ví dụ với nhóm một (2.7.2), ta dừng quá trình sau khử X_1, ở chỗ của r_{12} trong (2.7.3) sẽ xuất hiện $(r^*_{12}r_{12})$ (không ghi thành phần dưới đường chéo). Nếu thời điểm này ma trận $(r^*_{12}r_{12})$ sẽ ghi ra ngoài và thực hiện quá trình khử ẩn số tại đây; thì việc thành lập ma trận (2.7.8) $(r^*_{12}r_{12})$ có thể có sẵn ngoài rồi. Cách này theo chiều thuận của phương pháp tăng trưởng làm ta đi gần đến phương pháp truyền thống trong sách vở: phương pháp nhiều nhóm của Pranis - Pranevich. Tương tự trường hợp với hệ phương trình chuẩn cho nhóm tiếp theo. Theo cách này rất tiện, theo quan điểm rút ngắn thời gian làm việc.

Như đã rõ kết quả theo chiều thuận việc tính toán nhận giá trị của ẩn số nhóm cuối cùng (trường hợp của ta là ba). Cùng lúc cũng có thể xây dựng hệ khử rút gọn toàn thể

$$R^{I}_{11}X_{11} + R^{I}_{12}(X^{I}_{12} + \Delta X_{12}) \qquad + \rho^{I}_{1} = 0$$

$$R^{II}_{11}\Delta X_{12} + R^{II}_{12}X_{22} + R^{II}_{13}(X^{I}_{23}+\Delta X_{23}) + \rho^{II}_{1} = 0$$
$$R^{II}_{22}X_{22} + R^{II}_{23}(X^{I}_{23}+\Delta X_{23}) + \rho^{II}_{2} = 0$$

$$R^{III}_{11}\Delta X_{23} + R^{III}_{12}X_{33} + \rho^{III}_{1} = 0$$
$$R_{12}X_{33} + \rho^{III}_{2} = 0 \quad (2.7.16)$$

(X^{I}_{ij} - ẩn liên kết, nhận được theo chiều thuận của tính toán).

Công thức (2.7.16) chỉ theo cách nào tiếp theo cần tính toán và trị cuối cùng của ẩn số, tương ứng giải đồng thời ba nhóm phương trình.

Khi nói về hệ thống tự động hoá xử lý đo trắc địa, ngoài trị bình sai, ta cũng cần tính sai số trung phương hay trọng số đảo của trị bình sai. Điều đó cần hết ma trận tam giác $\widetilde{\overline{R}}_1^{-1}$, từ đây tính ma trận hệ số trọng số Q_i cho ẩn số của nhóm i. Cho nhóm cuối cùng ta có thể giải, giữ lưu đúng thuật toán Banaxiêvich (tiết 2.3.1.1). Không phải như thế đối với các nhóm còn lại.

Nếu quan sát theo thuật toán Banaxiêvich cho nhóm thứ ba ta có thể nhận ma trận tam giác

$$\widetilde{R}_3^{-1} = \begin{pmatrix} (R^{11})^{III} & (R^{12})^{III} & \Delta X_{23} \\ & (R^{22})^{III} & X_{33} \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.7.17)$$

Ma trận $\widetilde{R}_3^{-1}$ nhận được sau khi lật ma trận $\overline{R}_3$, từ (2.7.14) khi đặt vị trí cuối cùng của R_3 trị giá 1.

Ta viết $\overline{R}_2$ ở dạng

$$\widetilde{\overline{R}}_2 = \begin{pmatrix} R^{II}_{11} & R^{II}_{12} & R^{II}_{13} & \tilde{\rho}^{II}_1 \\ & R^{II}_{22} & R^{II}_{23} & \tilde{\rho}^{II}_2 \\ & & r_{23} & \rho_{23} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.7.18)$$

Ở đây $\tilde{\rho}_1^{II} = \rho_1^{II} + R_{13}^{II} X_{23}^{I}$, $\tilde{\rho}_2^{II} = \rho_1^{II} + R_{23}^{II} X_{23}^{I}$

và ta đã đặt tại vị trí cuối cùng của đường chéo giá trị 1. Ma trận $\overline{R}_2$ dạng tam giác trên.

Lưu ý rằng r_{23} ở (2.7.18) cũng cùng kích thước như $(R^{11})^{III}$ ở (2.7.17).

Theo lập luận của phương pháp tăng trưởng ma trận $\tilde{\tilde{R}}_2$ cần biến đổi vào ma trận $\hat{R}_2$, như ma trận hệ số trọng số với ẩn nhóm thứ hai Q_2 như sau

$$Q_2 = \hat{R}_2^{-1}\hat{R}^{*-1}_2 . \qquad (2.7.19)$$

Với mục đích này, nhìn lại lý thuyết phương pháp tăng trưởng, cần tạo ma trận hệ số trọng số cho các ẩn liên kết ΔX_{23}, tức Q_{23} (xem (2.7.17))

$$Q_{23} = (R^{11})^{III}(R^{11})^{III*} + (R^{12})^{III}(R^{12})^{III*} .$$

Ma trận nhận được đem biến đổi thành ma trận tam giác, ký hiệu qua

$$Q_{23} \Rightarrow \overline{Q_{23}\vee}$$

Ma trận $\overline{Q_{23}\vee}$ là ma trận tam giác dưới, và

$$Q_{23} = (\overline{Q_{23}\vee})^* (\overline{Q_{23}\vee}).$$

Ma trận $\overline{Q\vee}$ gọi là "căn ma trận tam giác dưới" của Q.

Giả sử $\underset{(n,n)}{N}$ là ma trận đối xứng và xác định dương, được phân chia N = R*R, R là ma trận tam giác trên với các thành phần thực. Có thể chỉ ra rằng N có thể phân tích N = T*T , T là ma trận tam giác dưới. Trong trường hợp này nói rằng, T là "căn ma trận tam giác dưới" và viết $T = \overline{N\vee}$

Biến đổi N ⇒ T thực hiện theo công thức

$$T_{ii} = \sqrt{N_{ii} - \sum_{h=i+1}^{n} T_{hi}^2} :$$

$$T_{ij} = (N_{ij} - \sum_{h=i+1}^{n} T_{hi}T_{hj}) : T_{ii} : \qquad (2.7.20)$$

$$i = n, n-1, ..., 1;\ j = 1, 2, ..., i-1;\ i > j .$$

Công thức (2.7.20) nói lên khi làm việc với máy tính thành phần của $\underset{(n,n)}{N}$ nằm trên đường chéo chính có thể không ghi trong bộ nhớ, vì không tham gia biến đổi. Biến đổi $N \Rightarrow T$ có thể đạt được theo con đường tuần tự khử các thành phần của N theo công thức sau:

$$T_{kk} = N_{kk,n-k+1} = \sqrt{N_{kk,n-k}};$$

$$T_{kl} = N_{kl,n-k+1} = N_{kl,n-k} / N_{kk,n-k+1};$$

$$N_{ij,n-k+1} = N_{ij,n-k} - N_{kl,n-k+1}; \qquad (2.7.20a)$$

$k = n, n-1, \ldots, 1;$

$l = 1, 2, \ldots k-1;$

$i = 1, 2, \ldots, k-1;$

$j = 1, 2, \ldots, i.$

Biến đổi cần tìm của ma trận R_2 nhận được khi đặt vào chỗ của r_{23} ma trận $(\sqrt{Q_{23}})^{*-1}$. Trong trường hợp này dẫn đến sự hợp lệ của (2.7.19).

Lật ngược của $\hat{R}_2$ dẫn đến ma trận

$$\hat{R}_2^{-1} = \begin{pmatrix} (R^{11})^{II} & (R^{12})^{II} & (R^{13})^{II} & \Delta X_{12} \\ & (R^{22})^{II} & (R^{23})^{II} & X_{22} \\ & & (\sqrt{Q_{23}})^{*} & \Delta X_{23} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.7.21)$$

Nói cách khác, ta lại quay về ma trận $\sqrt{Q_{23}}$ và vì vậy việc tính $(\sqrt{Q_{23}})^{-1}$ trở nên thừa. Xuất phát từ đặc điểm này, sẽ đưa ra tuần tự sau trong việc tính đến cuối của nhóm 2.

Tính ma trận Q_{23}, mà ma trận nhận được khi biến đổi lật ma trận, nhận được ma trận $(\sqrt{Q_{23}})^{*}$.

Ma trận của hệ thống khử rút gọn cho nhóm thứ II (2.7.9) biến đổi vào dạng

$$\hat{R}'_2 = \begin{pmatrix} R^{II}_{11} & R^{II}_{12} & R^{II}_{13} & \rho^{II}_1 \\ & R^{II}_{22} & R^{II}_{23} & \rho^{II}_2 \\ \text{----------} & & & \\ & & (\overline{Q_{23}\sqrt{}})^* \Delta X_{23} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Trong ma trận được thành lập $\hat{R}'_2$ đã có thể thực hiện lật ngược ma trận tam giác của hệ khử rút gọn; và cần tiếp tục thực hiện trên đường gạch đứt gãy. Nhưng việc này không thực hiện được khi bắt đầu từ thành phần bắc - tây của $\hat{R}'_2$, mà cần ngược lại, từ thành phần đông - nam (trên đường đứt gãy).

Đối với trường hợp chung của loại như thế ta quay về xem xét dạng ma trận trên

$$\underset{(m+n,m+n)}{R} = \begin{pmatrix} \underset{(m,m)}{R_{11}} & \underset{(m,n)}{R_{12}} \\ \text{----------} & \\ & \underset{(n,n)}{R^{22}} \end{pmatrix}.$$

Ở đây R_{11} là ma trận tam giác trên, còn R^{22} cũng là ma trận tam giác trên nhưng thành phần không nằm trong sự biến đổi. Trong trường hợp này công thức biến đổi của ma trận R /lật ngược một phần R/ thực hiện theo công thức sau

$$R^{ii} = 1/R_{ii};$$

$$R^{ij} = -(\sum_{h=i+1}^{j} R_{ih} R^{hj}) R^{ii};$$

$i = m, m-1, \ldots, 1$; $j = i+1, i+2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+n$; $i < j$

Và như thế khi sử dụng tính chất của thuật toán Banaxiêvich, biến đổi $\hat{R}_2$ theo công thức trên sẽ có thể viết ở dạng (2.7.21).

Ma trận $\hat{R}_2^{-1}$ chứa tất cả những gì cần thiết: trị cuối cùng của các ẩn số và các đại lượng, từ đó có thể trực tiếp nhận được trọng số đảo của các đại lượng này. Từ thuật toán Banaxiêvich biết được trọng số đảo của ẩn số thứ i trong nhóm, và nhận được như là tổng bình phương của các phần tử thuộc hàng thứ i của ma trận $\hat{R}_2^{-1}$.

Trước khi đến lời giải cuối cùng của nhóm thứ nhất, cần phải tính ma trận

$$Q_{12} = (R^{11})^{II}(R^{11})^{II*} + (R^{12})^{II}(R^{12})^{II*} + (R^{13})^{II}(R^{13})^{II*}$$

và đặt dưới phép biến đổi lật ngược, nhận được $\overline{Q_{12}\backslash/}$.

Tiến tới tính hoàn tất cho nhóm thứ nhất, cần thành lập ma trận

$$\hat{R}_1 = \begin{pmatrix} R^I_{11} & R^I_{12} & \tilde{\rho}^I_1 \\ . & \overline{Q_{12}\backslash/}^* & \Delta X_{12} \\ . & . & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{\rho}^I_1 = \rho^I_1 + R^I_{12}X^I_{12} \ .$$

Lật ngược phần còn lại của $\hat{R}_1$, nhận được lời giải cuối cùng cho nhóm thứ nhất

$$\hat{R}_1^{-1} = \begin{pmatrix} R^I_{11} & R^I_{12} & X_1 \\ . & \overline{Q_{12}\backslash/}^* & \Delta X_{12} \\ . & . & 1 \end{pmatrix} .$$

Như thế kết thúc chiều ngược của quá trình tính toán.

Khả năng hoàn toàn có thể tính được trọng số đảo và trị bình sai cho mỗi nhóm. nhằm mục đích này cần phải chú ý đến những trình bày ở tiết 2.3.1.1.

Tuần tự trình bày này các bước của phương pháp tăng trưởng, cho phép tổ chức quá trình tính toán để giải những hệ lớn phương trình hiệu chỉnh với tối ưu bộ nhớ. Hơn thế nữa, còn cho phép giảm thời gian, sơ đồ rõ ràng cho việc đánh giá độ chính xác của tất cả ẩn số và tất cả trị bình sai (nếu phương trình hiệu chỉnh ban đầu được lưu lại).

2.7.2. Thuật toán co đặc

2.7.2.1. Co đặc loại I / Bài toán Pranis - Pranevich/

Giả sử cho hai nhóm phương trình hiệu chỉnh chuẩn hoá (đã đưa về trọng số 1), mô tả dạng ma trận

$$\underset{(n1,1)}{V_1} = \underset{(n1,m1)}{A_1}\ \underset{(m1,1)}{X} + \underset{(n1,m2)}{B_1}\ \underset{(m2,y)}{Y} + \underset{(n1,1)}{F_1} \qquad (2.7.22)$$

$$\underset{(n2,1)}{V_2} = \underset{(n2,m2)}{B_2}\ \underset{(m2,1)}{Y} + \underset{(n2,1)}{F_2}$$

với

$$Q_{F1} = E, Q_{F2} = E;$$

$$\text{Rank}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ . & B_2 \end{bmatrix} = m_1 + m_2 \qquad (2.7.22a)$$

Hệ (2.7.22) có thể được thay phương trình tương đương

$$\underset{(m2,1)}{\Delta} = \underset{(m2,m2)}{R}\ \underset{(m2,1)}{Y} + \underset{(m2,1)}{\rho}\ , \qquad (2.7.23)$$

ở đây R là ma trận tam giác trên từ phân tích

$$N_2 = S^*S = R^*R\ ; \qquad (2.7.23a)$$

$$\rho = R^{*-1}S^*F\ ; \qquad (2.7.23b)$$

$$\text{với } S = \begin{bmatrix} (E - A_1(A^*_1A_1)^{-1}A^*_1)B_1 \\ \\ B_2 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \\ F_2 \end{bmatrix} \qquad (2.7.23c)$$

Khẳng định trên chứng minh qua sự so sánh của hệ phương trình chuẩn, tương ứng với điều kiện

$$V^*_1V_1 + V^*_2V_2 = \min , \qquad (2.7.24a)$$

$$\Delta^*\Delta \quad = \min \qquad (2.7.24b)$$

Hệ (2.7.23) nhận từ (2.7.22) khi xuất phát từ ma trận

$\overline{N} =$

	m_1	m_2	1
m_1	$N_{11} = A^*A_1$	$N_{12} = A^*_1B_1$	$L_1 = A^*_1F_1$
m_2	$N^*_{12} = B^*_1A_1$	$N_{22} = B^*_1B_1 + B^*_2B_2$	$L_2 = B^*_1F_1 + B^*_2F_2$

mà được biến đổi theo Z - thuật toán

$$N_{kk.k} = \sqrt{N_{kkk-1}}\ ,\ N_{kj.k} = {N_{kjk-1}}\Big/{N_{kk.k}}\ ,$$

$$j = \overline{k+1, m_1 + m_2 + 1}\ ;$$

$$N_{ij.k} = N_{ij.k-1} - N_{ki.k}N_{kj.k}\ ,$$

$$i = \overline{k+1, m_1 + m_2}\ ,\ j = \overline{i, m_1 + m_2 + 1} \qquad (2.7.25)$$

$$k = \overline{1, m_1 + m_2}\ .$$

Ở kết quả biến đổi của ma trận $\overline{N}$ theo Z - thuật toán nhận được ma trận

$$\tilde{\overline{N}} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & \tilde{N}_{13} \\ . & \tilde{N}_{22} & \tilde{L}_2 \end{bmatrix},$$

với

$$\tilde{N}_{12} = (\tilde{N}^*_{11})^{-1}N_{12}, \tilde{L}_1 = (\tilde{N}^*_{11})^{-1}L$$

$$\tilde{N}_{22} = R, \tilde{L}_2 = \rho$$

Ma trận $\widetilde{N}_{11}$ là ma trận tam giác trên, nhận được qua đưa N_{11} vào dạng tam giác ($N_{11} = \widetilde{N}^*_{11}\widetilde{N}_{11}$).

Hệ khử rút gọn với X nhận được

$$\widetilde{N}_{11}X + \widetilde{N}_{12}Y + \widetilde{L}_1 = 0 \quad (Q_{\widetilde{L}1} = E) \tag{2.7.26}$$

tương ứng

$$X = -\widetilde{N}^{-1}_{11}(\widetilde{N}_{12}Y + \widetilde{L}_1). \tag{2.7.26a}$$

Với ma trận hệ số trọng số cho cột X sẽ có

$$\begin{aligned} Q_X &= \widetilde{N}^{-1}_{11}\widetilde{N}^{*-1}_{11} + \widetilde{N}^{-1}_{11}(\widetilde{N}_{12}Q_y\widetilde{N}^*_{12})\widetilde{N}^{*-1}_{11} = \\ &= \widetilde{N}^{-1}_{11}(E + \widetilde{N}_{12}Q_y\widetilde{N}^*_{12})\widetilde{N}^{*-1}_{11} \end{aligned} \tag{2.7.27}$$

Ở đây ta chú ý rằng giữa thành phần Y và $\widetilde{L}_1$ không có phụ thuộc tương quan.

Lưu ý rằng nếu tuần tự khử rút gọn thực hiện với $k = \overline{1,m_1}$ thì đáng lẽ R ta nhận được $N_2 = S^*S = R^*R$, còn đáng lẽ ρ - được S^*F.

Trong một vài trường hợp cụ thể sự kiện này có khả năng rút ngắn tính toán.

Công thức (2.7.25) nói rằng thành phần ma trận đối xứng N, nằm dưới đường chéo chính, không tham gia vào quá trình biến đổi, vì vậy với máy tính có thể không ghi.

Việc co đặc đã xét trên có thể áp dụng cả khi phương trình thứ nhất trong (2.7.27) thiếu ($n_1 = m_1 = 0$). Khi đó co đặc loại I sẽ gọi là co đặc đơn giản.

Thuật ngữ co đặc sử dụng đầu tiên bởi T.Banaxiêvich, chính để định nghĩa co đặc chiều đứng ở đây, khi đặt phương trình (2.7.23) là phương trình co đặc.

Người ta còn có thể khẳng định rằng, co đặc loại I là cơ sở của phương pháp tăng trưởng, đặc trưng ở chiều thuận quá trình tính toán.

2.7.2.2. Co đặc loại II

Giả sử cho hai nhóm phương trình hiệu chỉnh chuẩn hoá viết ở dạng ma trận

$$\underset{(n1,1)}{V_1} = \underset{(n1,m1)}{A_1}\ \underset{(m1,1)}{X} + \underset{(n1,1)}{F_1}$$

$$\underset{(n2,1)}{V_2} = \underset{(n2,m1)}{A_2}\ \underset{(m1,1)}{X} + \underset{(n2,m2)}{B}\ \underset{(m2,1)}{Y} + \underset{(n2,1)}{F_2}\ , \qquad (2.7.28)$$

với

$$\text{rank}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = m_1\ ;\ Q_{F1} = E\ ;\ Q_{F2} = E\ . \qquad (2.7.28a)$$

Có thể chứng minh rằng, hệ (2.7.28) tương đương với hệ

$$\underset{(n1,1)}{V_1} = \underset{(n1,m2)}{\tilde{B}_1}\ \underset{(m,1)}{Y} + \underset{(n1,1)}{\tilde{F}_1}\ ,$$

$$\underset{(n2,1)}{V_2} = \underset{(n2,m2)}{\tilde{B}_2}\ \underset{(m2,1)}{Y} + \underset{(n2,1)}{\tilde{F}_2}\ , \qquad (2.7.29)$$

với

$$\tilde{B}_1 = -A_1(A^*A)^{-1}A^*{}_2B_2\ ,$$

$$\tilde{F}_1 = F_1 - A_1(A^*A)^{-1}A^*F\ ;$$

$$\tilde{B}_2 = B_2 - A_2(A^*A)^{-1}A_2{}^*B_2\ ,$$

$$\tilde{F}_2 = F_2 - A_2(A^*A)^{-1}A^*F\ ;$$

$$Q_{\tilde{F}_1} = E\ ,\ Q_{\tilde{F}_2} = E\ ,$$

ở đây

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\ ,\ F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \qquad (2.7.29b)$$

Chứng minh cho khẳng định trên nhận được khi từ phương trình (2.7.28) và (2.7.29) thành lập phương trình chuẩn và cột X của hệ phương trình chuẩn (2.7.28) được khử rút gọn. Ta thấy rằng hai cách này dẫn đến các hệ phương trình trùng nhau.

Nếu Rank $\begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \end{bmatrix} = m_2$, trên hệ (2.7.29) có thể thực hiện co đặc chiều đứng. Kết quả dẫn đến phương trình co đặc loại (2.7.23).

Quá trình co đặc loại II đang xét có thể thực hiện được, cả khi thiếu phương trình thứ nhất trong (2.7.28). Trong trường hợp này ta nói co đặc đơn giản loại II hay co đặc ngang, co đặc ngang thực chất dẫn đến khử sơ bộ một phần ẩn độc lập.

Co đặc loại II có thể thực hiện nhờ K - thuật toán. Trước hết thành lập ma trận $\overline{K}$:

$K^* = \overline{K} =$

	m_1	m_2	1
n_1	A_1	$B \equiv O$	F_1
n_2	A_2	B_2	F_2
m_1	$A_3 \equiv E$	$B_3 \equiv O$	$F_3 \equiv O$

được thực hiện theo công thức :

$$\overline{K}_{ir,r} = \overline{K}_{ir,r-1} \Big/ \sqrt{\sum_{h=1}^{n_1+n_2} \overline{K}^2_{hr,r-1}} \quad ,$$

$$\overline{K}_{ij,r} = \overline{K}_{ij,r-1} - \overline{K}_{ir,r} \sum_{h=1}^{n_1+n_2} \overline{K}_{hr,r} \overline{K}_{hj,r-1}; \qquad (2.7.30)$$

$$r = \overline{1, m_1} \; , \; i = \overline{1, n_1 + n_2 + m_1} \; , \quad j = \overline{r+1, m_1 + m_2 + 1} \; .$$

Biến đổi ma trận $\bar{K}$ theo công thức (2.7.30) thể hiện

$\tilde{\bar{K}} =$

	m_1	m_2	1
n_1	$\tilde{A}_1$	$\tilde{B}_1$	$\tilde{F}_1$
n_2	$\tilde{A}_2$	$\tilde{B}_2$	$\tilde{F}_2$
m_1	$\tilde{A}_3$	$\tilde{B}_3$	$\tilde{F}_3$

ở đây với $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ dùng công thức (2.7.29a)

$\tilde{B}_3$ và $\tilde{F}_3$ - tương ứng với K- thuật toán sẽ có

$$\tilde{B}_3 = -(A^*A)^{-1}A^*{}_2B_2 , \tag{2.7.31a}$$

$$\tilde{F}_3 = -(A^*A)^{-1}A^*F. \tag{2.7.31b}$$

Một mặt $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ và $\tilde{A}_3$ liên kết với những quan hệ phân tích trực giao của ma trận (xem phụ lục II):

$$\left[\tilde{A}^*{}_1\ \tilde{A}^*{}_2\right]\begin{bmatrix}\tilde{A}_1\\ \tilde{A}_2\end{bmatrix} = E , \tag{2.7.32a}$$

$$A = \begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{A}_1\\ \tilde{A}_2\end{bmatrix}\tilde{A}_3^{-1} . \tag{2.7.32b}$$

Nói cách khác $\tilde{A}_3^{-1}$ là ma trận tam giác trên, phân tích trực giao (2.7.32b)

Từ (2.7.32a) và (2.7.32b), chú ý (2.7.29b) nhận

$$A^*A = \tilde{A}^*{}_3^{-1}\tilde{A}_3^{-1} = (\tilde{A}_3\tilde{A}^*{}_3)^{-1} . \tag{2.7.33}$$

Vì vậy

$$(A^*A)^{-1} = \tilde{A}_3\tilde{A}^*{}_3 . \tag{2.7.34}$$

Khi thay (2.7.34) vào (2.7.31a) và (2.7.31b) , nhận được

$$\tilde{B}_3 = -(\tilde{A}_3\tilde{A}^*{}_3)A^*{}_2 B_2 \qquad (2.7.35a)$$

$$\tilde{F}_3 = -(\tilde{A}_3\tilde{A}^*{}_3)AF \qquad (2.7.35b)$$

Khi xem X như cột ẩn không phụ thuộc (độc lập), nó có thể thể hiện thông qua biến đổi tuyến tính Y;

$$X = \tilde{B}_3 Y + \tilde{F}_3 . \qquad (2.7.36)$$

Vì giữa các thành phần của Y và $\tilde{F}_3$ không có phụ thuộc tương quan, với ma trận hệ số trọng số của cột X có

$$Q_X = Q_{\tilde{F}3} + \tilde{B}_3 Q_y \tilde{B}^*{}_3 . \qquad (2.7.37)$$

Với $Q_{\tilde{F}3}$ khi sử dụng (2.7.35b) nhận được

$$Q_{\tilde{F}3} = \tilde{A}_3\tilde{A}^*{}_3 . \qquad (2.7.38)$$

2.7.2.3. Ứng dụng của thuật toán co đặc

Ta nhận rằng hệ phương trình hiệu chỉnh chung phân chia thành t nhóm, sao cho nhóm thứ j ($j = \overline{1,t}$) có thể biểu diễn dưới dạng

$$V_j = A_{j,j-1}X_{j,j-1} + A_{j,j}X_{j,j} + A_{j,j+1}X_{j,j+1} + F_j . \qquad (2.7.39)$$

Ta nhận thêm nữa rằng phương trình (2.7.39) đã chuẩn hoá, tức hiệu chỉnh đưa về trọng số đơn vị.

Trong phương trình (2.7.39) $X_{j,j}$ là cột bộ phận ẩn độc lập, $X_{j,j-1}$ là cột ẩn số liên kết nhóm j với nhóm (j -1), còn $X_{j,j+1}$ là vột ẩn, nối nhóm j với nhóm (j + 1).

Nói cách khác, xác định trước liên quan giữa các nhóm riêng biệt, sao cho nhóm (j + p) không có ẩn chung với nhóm j - q với $1 < p \le t - j$, $1 < q < j$.

Rõ ràng nếu với j = 1 số hạng thứ nhất trong (2.7.39) sẽ không có, còn với j = t sẽ thiếu số hạng thứ ba.

Để giải bài toán đặt điều kiện

$$\sum_{j=1}^{t} V_j * V_j = \min . \qquad (2.7.40)$$

Ta sẽ theo dõi toàn bộ quá trình tính toán.

1. Trước tiên từ mỗi nhóm phương trình hiệu chỉnh qua co đặc ngang (loại II) loại ẩn độc lập riêng, nhận hệ khử rút gọn cho $X_{j,j}$ và hệ biến đổi:

$$V_j = \tilde{A}_{j,j-1} X_{j-1,j-1} + \tilde{A}_{j,j+1} X_{j,j+1} + \tilde{F}_j . \qquad (2.7.41)$$

Để cho rõ, cho t = 4, tương ứng với (2.7.41) với bốn nhóm sẽ có co đặc ngang phương trình :

$$\begin{aligned}
V_1 &= \tilde{A}_{1,2} X_{1,2} + \tilde{F}_1 , \\
V_2 &= \tilde{A}_{2,1} X_{1,2} + \tilde{A}_{2,3} X_{2,3} + \tilde{F}_2 , \\
V_3 &= \tilde{A}_{3,2} X_{2,3} + \tilde{A}_{3,4} X_{3,4} + \tilde{F}_3 , \\
V_4 &= \tilde{A}_{4,3} X_{3,4} + \tilde{F}_4 .
\end{aligned} \qquad (2.7.42)$$

ở đây $X_{j,j-1} \equiv X_{j-1,j}$.

2. Với giai đoạn tiếp theo phương trình nhóm thứ nhất và nhóm thứ hai thực hiện co đặc loại II, dẫn đến phương trình co đặc thuộc loại

$$\begin{aligned}
V_1 &= \hat{A}_1 X_{2,3} + \hat{F}_1 , \\
V_2 &= \hat{A}_2 X_{2,3} + \hat{F}_2 .
\end{aligned} \qquad (2.7.43)$$

và hệ khử với $X_{1,2}$

3. Phương trình (2.7.43) thực hiện co đặc đứng, nhận được hệ tương đương

$$\Delta_{1,2} = R_{1,2} X_{2,3} + \rho_{1,2} . \qquad (2.7.44)$$

4. Bây giờ thực hiện co đặc loại II phương trình

$$\Delta_{1.2} = R_{1.2}X_{2.3} + \rho_{1.2} .$$
$$V_3 = \tilde{A}_{3.2}X_{2.3} + \tilde{A}_{3.1}X_{3.1} + \tilde{\rho}F_3 . \quad (2.7.45)$$

ở kết quả nhận được hệ tương đương

$$\Delta_{1.2} = \hat{A}_{1.2}X_{3.1} + \hat{F}_{1.2}$$
$$V_3 = \hat{A}_3 X_{3.1} + \hat{F}_3 \quad (2.7.46)$$

và hệ khử với $X_{2.3}$.

5. Như ta đã làm với phương trình (2.7.43) và phương trình (2.7.46), sẽ thực hiện co đặc đứng (loại I), nhận hệ tương đương

$$\Delta_{1.2.3} = R_{1.2.3}X_{3.1} + \rho_{1.2.3} . \quad (2.7.47)$$

6. Tiến tới chuyển sang nhóm cuối cùng (thứ tư), cần giải đồng thời phương trình

$$\Delta_{1.2.3} = R_{1.2.3}X_{3.1} + \rho_{1.2.3} . \quad (2.7.48)$$
$$V_1 = \tilde{A}_{1.3}X_{3.1} + \tilde{F}_1 .$$

Giải (2.7.48) theo phương pháp bình phương tối thiểu sẽ cho giá trị của các thành phần $X_{3.1}$ và $Q_{X3.1}$.

Với như thế hoàn thành bước thuận của quá trình tính toán.

Như đã thấy, với mỗi bước (từ bước thứ nhất và cuối cùng) theo chiều thuận ta thực hiện hai co đặc - một cho loại hai và một cho loại đứng.

Với bước ngược lại đi vào tuần tự các hệ khử (cho $X_{2.3}$ và $X_{1.2}$), theo cách như chỉ trên, tính ma trận hệ số trọng số cho $X_{2.3}$ và $X_{1.2}$. Cuối cùng đi vào hệ khử cho phần riêng ẩn độc lập $X_{1.1}$, $X_{2.2}$, $X_{3.3}$ và $X_{1.1}$. Ở đây vì không biết quan hệ tương quan giữa $X_{1.2}$ và $X_{2.3}$ (tương ứng $X_{2.3}$ và $X_{3.1}$), không có thể tính ma trận tương quan cho ẩn độc lập riêng. Trong nhiều trường hợp thực

tiễn chỉ cần biết hệ số trọng số của các ẩn liên kết, nếu như thế thì bài toán coi như chưa giải đến cùng.

2.7.3. Bình sai điều kiện nhiều nhóm với ẩn số

Ở tiết 2.7.1 và 2.7.2 trình bày thuật toán giải bài toán bình sai gián tiếp nhiều nhóm. Mở rộng khả năng thuật toán này khi sử dụng bình sai điều kiện với ẩn số.

Điều này lý giải bình sai điều kiện ẩn số phụ có thể bao hàm phương pháp số chung nhất để giải bài toán với trợ giúp phương pháp bình phương tối thiểu.

Giả sử có tất cả đại lượng đo chia ra t nhóm.

$$\begin{aligned} &l_{11}, l_{12}, ..., l_{1n1};\\ &l_{21}, l_{22}, ..., l_{2n2};\\ &.....\\ &l_{t1}, l_{t2}, ..., l_{tnt};\\ &n_1 + n_2 + ... + n_t = n; \end{aligned} \qquad (2.7.49)$$

và như thế mỗi nhóm có khả năng thành lập phương trình điều kiện dưới dạng

$$\underset{(mi,ni)}{A_i}\ \underset{(ni,1)}{V_i} + \underset{(mi,u)}{B_i}\ \underset{(u,1)}{X} + \underset{(mi,1)}{W} = \underset{(mi,1)}{0} \qquad (2.7.50)$$

Trong này $m = m_1 + m_2 + ... + m_t$ ($i = \overline{1,t}$) phương trình điều kiện với ẩn số - thành phần cột X - đứng vai trò ẩn số liên kết.

Một việc đo tham gia chỉ vào một nhóm phương trình điều kiện, nó cho phép xử lý ban đầu độc lập lẫn nhau cho mỗi nhóm phương trình điều kiện. Ta cần hiển thị mỗi một nhóm phương trình điều kiện

$$K_i = [\hat{A}_i\ B_i W_i]\ , \qquad (2.7.51)$$

ở đây $\hat{A}_i$ là ma trận hệ số trước hiệu chỉnh chuẩn hoá, B_i là ma trận hệ số trước ẩn số, còn W_i là cột số hạng tự do của phương trình điều kiện trong nhóm i (so sánh với tiết 2.6.3).

Khi áp dụng K - thuật toán, biến đổi ma trận K_i vào dạng

$$\tilde{K}_i = \left[\tilde{A}_i \quad \tilde{B}_i \quad \tilde{W}_i\right]. \tag{2.7.52}$$

Khi nhận biết thực chất của bình sai điều kiện với ẩn số, ta có thể kết luận rằng mỗi một nhóm phương trình điều kiện có thể thành lập hệ tương đương với hiệu chỉnh chuẩn hóa, mà có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta_i = \tilde{B}_i X + \tilde{W}_i \ . \tag{2.7.53}$$

Sẽ thực hiện liên kết của các nhóm khi giải tất cả phương trình dạng (2.7.53)

$(i = \overline{1,t})$ với điều kiện

$$\sum_{i=1}^{t} \Delta^*_i \Delta_i = \min \ . \tag{2.7.54}$$

Điều kiện (2.7.54) dẫn đến hệ phương trình chuẩn với ẩn số, được biểu diễn dưới dạng

$$(\sum_{i=1}^{t} \tilde{B}^*_i \tilde{B}_i)X + \sum_{i=1}^{t} \tilde{B}^*_i \tilde{W}_i = 0 . \tag{2.7.55}$$

Giải hệ (2.7.55) với máy tính rất thuận lợi theo thuật toán Banaxiêvich. Bây giờ nhận ẩn số - thành phần cột X, theo (2.7.53) tính cột Δ_i cho mỗi nhóm. Tiếp quay lại mỗi một nhóm riêng, mà tương tự như công thức (3.7.32) tính hiệu chỉnh chuẩn hoá

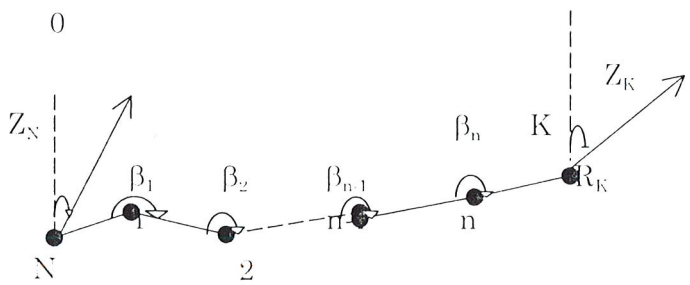
$$\hat{V}_i = -\tilde{A}^*_i \Delta_i \ . \tag{2.7.56}$$

Rõ ràng ẩn số trong (2.7.53) có thể chia ra các thành phần độc lập và ẩn liên kết theo ý nghĩa, đã trình bày khái niệm trong tiết 2.7.1 và 2.7.2; vì vậy việc giải đồng thời của tất cả phương trình dạng (2.7.53) với chú ý (2.7.54) có thể áp dụng phương pháp tăng trưởng hay thuật toán co đặc. Chính đặc biệt này đã mở rộng khả năng của bình sai điều kiện nhiều nhóm với ẩn số phụ.

Bình sai điều kiện nhiều nhóm với ẩn số tìm ứng dụng rộng dãi trong xây dựng và hệ thống tự động hoá trong bình sai của mạng đường truyền, mạng kết hợp, trong mạng thiên văn châu lục, mạng vũ trụ và còn nhiều nữa.

Để minh hoạ ta sẽ thành lập phương trình điều kiện với trường hợp bình sai mạng đường truyền, tuân thủ yêu cầu cơ bản của phương pháp - mỗi một đại lượng đo tham gia chỉ một nhóm phương trình điều kiện.

Xem xét ngắn gọn thuật toán bình sai mạng đường chuyền, đề xuất với Giáo sư G.Zlatanov, ở đó điều kiện trên đạt được khi đưa toạ độ ẩn số tại điểm nút và góc định hướng của các hướng được ngắm từ mỗi một điểm nút. Trong trường hợp như thế mỗi đường chuyền, mỗi hai điểm nút (hình 2.7.2) sẽ thành lập nhóm phương trình sau, tương ứng với (2.7.50):



Hình 2.7.2. Đường chuyền giữa điểm N và K.

$$v_{RN} - v_{RK} + [v_{\beta i}]_{i=1}^{i=n} + dz_N - dz_K + w_\beta = 0 ,$$

$$[\cos\alpha'_{ij} v_{Sij}]_N^K - \frac{1}{\rho''^{cc}}[(y'_K - y'_i)v_{\beta i}]_{i=1}^{i=n} -$$

$$- \frac{1}{\rho''^{cc}}(y'_K - y'^0_N)v_{RN} - \frac{1}{\rho''^{cc}}(y'_K - y'^0_N)dZ_N -$$

$$- dx_K + dx_N + w_X = 0 ,$$

$$[\sin\alpha'_{ij} v_{Sij}]_N^K + \frac{1}{\rho''^{cc}}[(x'_K - x'_i)v_{\beta i}]_{i=1}^{i=n} +$$

$$\frac{1}{\rho''^{cc}}(x'_K - x'^0_N)v_{RN} + \frac{1}{\rho''^{cc}}(x'_K - x'^0_N)dZ_N -$$

$$- dy_K + dy_N + w_Y = 0 ,$$

ở đây

$$\alpha'_{ij} = Z'^0_N + R'_N + [\beta'_i]_{i=1}^{i=n} - i.180 ;$$

$$w_\beta = R'_N - R'_K + [\beta'_i]_{i=1}^{i=n} + Z'^0_N - Z'^0_K - i.180,$$

$$w_X = [S'_{ij}\cos\alpha'_{ij}]_N^K - (x'^0_K - x'^0_N) , \qquad (2.7.58)$$

$$w_Y = [S'_{ij}\sin\alpha'_{ij}]_N^K - (y'^0_K - y'^0_N) ;$$

$$x'_q = x'^0_n + [S'_{ij}\cos\alpha'_{ij}]_N^q , \; y'_q = y'^0_N + [S'_{ij}\sin\alpha'_{ij}]_N^q .$$

Trong công thức (2.7.57) và (2.7.58) nhận ký hiệu sau:

$x'^0_N, y'^0_N, x'^0_K, y'^0_K$ - tọa độ gần đúng của điểm đầu N và điểm cuối K:

dx_N, dy_N, dx_K, dy_K - hiệu chỉnh tọa độ gần đúng của điểm N và K:

Z'^0_N, Z'^0_K - trị gần đúng của góc hướng tại điểm N và K:

dz_N, dz_K - hiệu chỉnh góc hướng gần đúng:

R'_N, R'_K - hướng do từ N tới 1, tương ứng từ K tới n:

V_{RN}, V_{RK} - hiệu chỉnh của R'_N và R'_K,

β'_i - góc đo trên điểm đường chuyền i;

$V_{\beta i}$ - hiệu chỉnh của β_{ij}.

S'_{ij} - cạnh đo (từ I đến J)

V_{Sij} - hiệu chỉnh của S_{ij}.

Nếu là điểm N có hướng đo ngoài đến điểm kề, lại còn tới một điểm nút nào đó, ví dụ K, thì hướng này có thể thành lập phương trình [so sánh với 2.4.1]

$$V_{NK} = -dz_N + a_{NK}dx_N + b_{NK}d_{YN} - a_{NK}dx_K - b_{NK}dy_K + f_{NK}, \quad (2.7.59)$$

ở đây a_{NK} và b_{NK} là hệ số chỉ hướng, còn f_{NK} là số hạng tự do, được tính theo công thức

$$f_{NK} = \alpha^0_{NK} - R'_{NK} - Z^0_N. \quad (2.7.60)$$

Tất cả phương trình dạng (2.7.59) có thể xem như phương trình nhóm phụ. Những phương trình này thêm vào phương trình tương đương mà nhận được qua biến đổi hệ (2.7.56) cho mỗi một đường chuyền.

Như vậy thuật toán trình bày có thể dạng tổng quát cho trường hợp bình sai mạng tổng hợp, như loại mạng điểm nút là các điểm liên kết qua các đường chuyền, qua các hướng đo trực tiếp.

Nếu điểm N (tương ứng điểm K) đã cho, thì số hạng dx_N, dy_N (tương ứng dx_K, dy_K) trong phương trình (2.5.57) và (2.5.59) sẽ không có.

Từ quan điểm thực tế thích hợp là phương trình dạng (2.7.59) đưa về trọng số đơn vị, tức làm việc với hiệu chỉnh chuẩn hoá, và sau đó thêm vào các nhóm phương trình tương đương.

2.8. CÁC PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Phương pháp lặp giải hệ phương trình tuyến tính là giải hệ ở dạng tiệm cận dần đến lời giải đúng (cuối cùng). Vì vậy còn gọi phương pháp tiệm cận dần. Theo nguyên tắc thuật toán của những phương pháp này rất đơn giản từ quan điểm tính toán và thuận tiện cho việc lập trình.

Khó khăn cơ bản của việc ứng dụng của những phương pháp này gắn liền với sự hội tụ của lời giải (nghiệm). Vì lý do đó phạm vi ứng dụng của quá trình tiệm cận là hạn chế.

Trong tiết này sẽ xem xét một vài phương pháp lặp hay ứng dụng trong xử lý tính toán bình sai trong trắc địa.

Ta lưu ý ngay rằng phương pháp lặp không thuận tiện cho lật ma trận (trừ một vài phương pháp nửa lặp), vì vậy không thực hiện đánh giá độ chính xác của đại lượng bình sai như ta đã biết ở phương pháp giải đúng.

Giả sử cho hệ phương trình tuyến tính, viết dưới dạng ma trận.

$$NX + L = 0 , \tag{2.8.1}$$

ở đây N là ma trận không suy biến và $L \neq 0$.

Nhưng phương pháp giải lặp xây dựng một tuần tự X_1, X_2,..., X_K, ... theo công thức truy hồi như sau:

$$X_K = X_{K-1} + H_K(NX_{K-1} + L) , \tag{2.8.2}$$

ở đây H_K (K = 1, 2, ...) là một vài xếp đặt của ma trận.

Với tất cả quá trình tính lặp, nếu X_1 trùng với giải đúng của hệ, các ẩn tiếp theo X_i (i = 2, 3, ...) sẽ trùng với X_1.

Quá trình đơn giản nhất giữa những quá trình lặp gọi là quá trình hội tụ. Ở đó ma trận $H_K = H_0$ không phụ thuộc vào số K của việc lặp. Với $H_0 = -E$ dẫn đến quá trình lặp kinh điển của quá trình gần đúng tuần tự. Mỗi quá trình hội tụ với $H_0 \neq -E$ có thể xem như quá trình gần đúng dần, đưa đến hệ

$$(H_0N)X + H_0L = 0. \qquad (2.8.3)$$

Khi ma trận tuần tự H_K chọn theo một lớp xác định trước sao cho mỗi bước quá trình tính, một đại lượng nào đó (đặc trưng cho độ chính xác của nghiệm) giảm, khi đó gọi là phương pháp relak. Giữa các phương pháp relak đóng vai trò lớn nhất trong trắc địa là phương pháp gradient. Ở đó ma trận H_K thay bằng các đại lượng vô hướng.

Ký hiệu nghiệm đúng của hệ (2.8.1) là $\overline{X}$. Trong trường hợp này độ chính xác của nghiệm giải gần đúng của hệ là ma trận sai số $y_i = \overline{X} - X_i$. Ma trận này không có thể xác định, nếu không biết nghiệm đúng $\overline{X}$. Vì vậy trong thực tế sử dụng ma trận $\Delta_i = NX_i + L$. Rõ ràng có liên quan $\Delta_i = -N.y_i$. Với như thế phương pháp relak có thể xây dựng trên cơ sở giảm ví dụ đại lương $\Delta_i^*\Delta_i$ (hay một vài chuẩn khác của ma trận Δ_i).

Với tính toán trắc địa hay làm việc với ma trận đối xứng. Ở đây dấu hiệu của độ chính xác của nghiệm, là hàm sai số. Nếu ma trận N từ (2.8.1) xác định dương, hàm sai số sẽ là

$$f(X_i) = y_i^*Ny_i = -y_i^*\Delta_i = \Delta_i^*N^{*-1}\Delta_i \qquad (2.8.4)$$

Vì theo N xác định dương, nên luôn luôn $f(X_i) \geq 0$, như thế $f(X_i) = 0$ khi $X_i = \overline{X}$.

Hàm sai số với đối xứng N có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(X_i) = -(\overline{X} - X_i)^* \Delta_i = (\overline{X} - X_i)^*(NX_i + L) =$$
$$= -\overline{X}^*NX_i + X_i^*NX_i - \overline{X}^*L + X_i^*L =$$
$$=(N^{-1}L)^*NX_i + X_i^*NX_i - \overline{X}^*L + X_i^*L =$$
$$= L^*(N^{-1})^*NX_i + X_i^*NX_i - \overline{X}^*L + X_i^*L =$$
$$= L^*X_i + X_i^*NX_i - \overline{X}^*L + X_i^*L =$$
$$= (X_i^*NX_i + 2X_i^*L) - \overline{X}^*L\,, \qquad (2.8.5)$$

ở đây ta để ý đến đối xứng của N, và L*X là số (và vì vậy $L^*X_i = X_i^*L$) và quan hệ $\overline{X} = -N^{-1}L$.

Hàm sai số (2.8.5) có thể áp dụng nếu biết N^{-1} không sai số hay nếu biết nghiệm đúng $\overline{X}$. Thực sự làm hàm sai số không sử dụng được. Vì vậy đáng lẽ hàm sai số $f(X_i)$ ta dùng hàm

$$f_0(X_i) = X_i^*NX_i + 2X_i^*L\,, \qquad (2.8.6)$$

mà nó có khác với $f(X_i)$ với trị hằng số $\overline{X}^*L$. Điều đó nói rằng cực tiểu của hàm sai số (2.8.5) đạt đến cùng với cực tiểu đại lượng $f_0(X_i)$ ở (2.8.6).

2.8.1. Phương pháp gần đúng dần

Hệ phương trình tuyến tính NX + L = 0 có thể biểu diễn dưới dạng

$$X = (E - N)X - L \qquad (2.8.7)$$

và cho phép đưa ra một quá trình tính lặp, mô tả qua quan hệ

$$X_K = (E - N)X_{K-1} - L = X_{K-1} - (NX_{K-1} + L)\,. \qquad (2.8.8)$$

So sánh (2.8.8) với (2.8.2) dẫn đến H = -E, khẳng định rằng phương pháp tiệm cận ổn định. Zaide đưa vào một kiểu như trên của quá trình tính gần đúng, chính là: với việc tính gần đúng thứ K, thành phần j của X_K được tính c trị đã được cải thiện của j - 1 phần tử của X_{K-1}.

Phương pháp gần đúng không luôn luôn hội tụ trong việc giải hệ phương trình chuẩn.

2.8.2. Phương pháp lặp nhóm

Giả sử có hệ phương trình chuẩn, biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + F_1 = 0\ , \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 + F_2 = 0\ , \\ A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 + F_3 = 0\ , \end{aligned} \qquad (2.8.9)$$

ở đây A_{ii} là ma trận đối xứng, xác định dương, còn $A_{ij} = A^*_{ji}$ (i,j = 1, 2, 3; i ≠ j).

Qua (2.8.9) ta chia tách hệ chung ra ba hệ con.

Phương trình (2.8.9) viết qua dạng

$$\begin{aligned} X_1 &= -A^{-1}{}_{11}(A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + F_1)\ , \\ X_2 &= -A^{-1}{}_{22}(A_{21}X_1 + A_{23}X_3 + F_2)\ , \\ X_3 &= -A^{-1}{}_{33}(A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + F_3)\ . \end{aligned} \qquad (2.8.10)$$

Công thức (2.8.10) cho phép có được một quá trình lặp Zaiden, mô tả qua các phương trình

$$\begin{aligned} X_1^{(K+1)} &= -A^{-1}{}_{11}(A_{12}X_2^{(K)} + A_{13}X_3^{(K)} + F_1)\ , \\ X_2^{(K+1)} &= -A^{-1}{}_{22}(A_{21}X_1^{(K+1)} + A_{23}X_3^{(K)} + F_2)\ , \\ X_3^{(K+1)} &= -A^{-1}{}_{33}(A_{31}X_1^{(K+1)} + A_{32}X_2^{(K+1)} + F_3)\ . \end{aligned} \qquad (2.8.11)$$

Quá trình lặp kết thúc, khi các cột

$$\begin{aligned} \Delta_1^{(K+1)} &= X_1^{(K+1)} - X_1^{(K)}\ , \\ \Delta_2^{(K+1)} &= X_2^{(K+1)} - X_2^{(K)}\ , \\ \Delta_3^{(K+1)} &= X_3^{(K+1)} - X_3^{(K)}\ , \end{aligned} \qquad (2.8.12)$$

đạt được

$$\left\{\left\|\Delta_1^{(K+1)}\right\| + \left\|\Delta_2^{(K+1)}\right\| + \left\|\Delta_3^{(K+1)}\right\|\right\} : n \le \varepsilon, \qquad (2.8.13)$$

ở đây $\left\|\Delta_i^{(K+1)}\right\|$ là tổng bình phương của thành phần Δ_i , ε - số dương đủ nhỏ, còn n - số tất cả ẩn số trong hệ.

Phương pháp lặp này mang tên "phương pháp lặp nhóm", đề xuất bởi nhà trắc địa Xô Viết Gaiđaev, nó có ứng dụng trực tiếp trong bình sai mạng trắc địa.

Giả sử trong một mạng trắc địa cần dùng 3 điểm áp dụng phương pháp lặp nhóm, có thể nhận rằng tọa độ của mỗi điểm xác định tạo thành một nhóm. Vì vậy trong mạng chúng ta tạo thành ba nhóm ẩn số (giả sử ẩn định hướng đã sơ bộ loại khỏi hệ phương trình chuẩn).

Với trị ban đầu của ẩn ta cho bằng không. Để ý đến (2.8.11) có thể xây dựng quá trình lặp:

1. Tính hiệu chỉnh tọa độ của điểm xác định thứ nhất qua bình sai một giao hội tổng hợp, xuất phát từ các điểm tam giác đã cho và xem như các điểm xác định còn lại như là điểm đã cho (không xác định trị cuối cùng của góc định hướng). Hiệu chỉnh tọa độ nhận được thêm vào tọa độ đúng của điểm thứ nhất.

2. Tiếp đến tính cho điểm xác định tiếp theo, thực hiện như ở điểm thứ nhất.

3. Điểm 2, lặp lại đến khi xong tất cả các điểm xác định.

Với như thế kết thúc chu kỳ tính thứ nhất.

Chu kỳ tính lặp thứ hai thực hiện tuần tự cũng như thế.

Tính lặp tiếp tục đến khi thoả mãn chỉ tiêu được chọn.

Phương pháp lặp nhóm có thể áp dụng với nhóm ẩn số lớn hơn. Nó rất thuận tiện cho lập trình và rất tiết kiệm bộ nhớ, nhưng có một nhược điểm trầm trọng - không thể đánh giá độ chính xác trị bình sai nhận được.

Chính vì những hạn chế này phương pháp lặp nhóm chỉ sử dụng một phần, hay là cũng như phương pháp tăng trưởng - để giảm các đại lượng của các ẩn số.

2.8.3. Phương pháp gần đúng nhanh nhất (phương pháp gradien)

Phương pháp này dùng để giải hệ phương trình tuyến tính với ma trận xác định dương và luôn luôn hội tụ. Khi ma trận hệ số không những xác định dương và đối xứng. Hệ phương trình chuẩn xác định dương và vì vậy phương pháp gradien có thể ứng dụng để giải bài toán chuẩn của phương pháp bình phương tối thiểu.

Giả sử xét hệ phương trình tuyến tính, biểu diễn dạng ma trận

$$NX + L = 0 \qquad (2.8.14)$$

ở đây N là ma trận xác định dương.

Giải hệ (2.8.14) liên quan đến cực tiểu của

$$f_0(X) = X^*NX + 2X^*L \qquad (2.8.15)$$

theo cách sau:

Giả sử X_0 là cột ma trận chọn bất kỳ sao cho

$$\Delta_0 = NX_0 + L \neq 0 . \qquad (2.8.16)$$

sẽ tìm nghiệm X_1 tốt hơn của (2.8.14) sao cho

$$X_1 = X_0 + \alpha\Delta_0 , \qquad (2.8.17)$$

ở đây α là một số. Rõ ràng ($H \equiv \alpha$) ta đang xét một phương pháp gradien.

Tương ứng với (2.8.16) ta có

$$\Delta_1 = NX_1 + L \qquad (2.8.18)$$

Theo trình bày ở đầu, cần tìm một nghiệm, mà cực tiểu $f_0(X_1)$ (xem công thức (2.8.15)).

Đặt (2.8.17) và (2.8.6) nhận được

$$f_0(X_1) = f_0(X_0 + \alpha\Delta_0) = (X_0^* + \alpha\Delta_0^*)N(X_0 + \alpha\Delta_0) +$$
$$+ 2(X_0^* + \alpha\Delta_0^*)L = X_0^*NX_0 + 2\alpha\Delta_0^*NX_0 +$$
$$+ \alpha^2\Delta_0^*N\Delta_0 + 2X_0^*L + 2\alpha\Delta_0^*L =$$
$$= f_0(X_0) + \alpha^2\Delta_0^*N\Delta_0 + 2\alpha\Delta_0^*(NX_0 + L) =$$
$$= f_0(X_0) + 2\alpha\Delta_0^*\Delta_0 + \alpha^2\Delta_0^*N\Delta_0 . \qquad (2.8.19)$$

ở đây ta chú ý đến (2.8.16) và quan hệ

$$f_0(X_0) = X_0^*NX_0 + 2X_0^*L. \qquad (2.8.20)$$

Qua những biến đổi (2.8.19) có thể biểu diễn ở dạng

$$f_0(X_1) = f_0(X_0) - \frac{(\Delta^*_0\,\Delta_0)^2}{\Delta^*_0\,N\Delta_0} + \Delta^*_0\,N\Delta_0\left(\alpha + \frac{\Delta^*_0\,\Delta_0}{\Delta^*_0\,N\Delta_0}\right)^2 \qquad (2.8.21)$$

Với xác định dương của N và $\Delta_0 \neq 0$ đại lượng $\Delta_0^*N\Delta_0$ luôn luôn dương; và đại lượng $\left(\alpha + \frac{\Delta^*_0\,\Delta_0}{\Delta^*_0\,N\Delta_0}\right)^2$ cũng dương. Như thế số hạng thứ 3 của (2.8.21), trong đó tham gia thành phần α, luôn luôn không âm. Điều đó nói rằng cực tiểu của (2.8.21) dẫn đến cùng với trở thành không của số hạng thứ ba của (2.8.21), hay là một khi

$$\alpha = \alpha_0 = -\frac{\Delta^*_0\,\Delta_0}{\Delta^*_0\,N\Delta_0} . \qquad (2.8.22)$$

Và như thế gần đúng thứ nhất tốt nhất là

$$X_1 = X_0 - \frac{\Delta^*_0\,\Delta_0}{\Delta^*_0\,N\Delta_0}\Delta_0 . \qquad (2.8.23)$$

Trình bày trên cho phép xác định quá trình lặp sau

$$X_K = X_{K-1} - \frac{\Delta^*_{K-1}\,\Delta_{K-1}}{\Delta^*_{K-1}\,N\Delta_{K=1}}\Delta_{K-1}, \qquad (2.8.24)$$

với

$$\Delta_{K-1} = NX_{K-1} + L$$

Nhưng

$$\Delta_K - \Delta_{K-1} = N(X_K - X_{K-1}) = -\frac{\Delta^*_{K-1}\,\Delta_{K-1}}{\Delta^*_{K-1}\,N\Delta_{K-1}}N\Delta_{K-1}, \qquad (2.8.25)$$

cũng thế

$$\Delta_K = \Delta_{K-1} - \frac{\Delta^*_{K-1}\,\Delta_{K-1}}{\Delta^*_{K-1}\,N\Delta_{K-1}}N\Delta_{K-1}. \qquad (2.8.26)$$

Nhân (2.8.26) bên trái với Δ_{K-1}^* nhận được

$$\Delta_{K-1}^*\Delta_K = \Delta^*_{K-1}\Delta_{K-1} - \Delta^*_{K-1}\,\Delta_{K-1}\frac{\Delta^*_{K-1}\,N\Delta_{K-1}}{\Delta^*_{K-1}\,N\Delta_{K-1}} = 0. \qquad (2.8.27)$$

Phương trình (2.8.27) nói rằng sự khác biệt giữa hai gần đúng tuần tự trực giao với nhau. Diễn giải cuối cùng là một tính chất quan trọng của phương pháp gần đúng nhanh nhất (gradien).

2.8.4. Phương pháp gradien căng

Phương pháp gradien căng đưa ra một lớp đầy đủ lời giải nửa lặp (với số lặp hữu hạn). Ở đây sẽ xem xét giải hệ đối xứng với ma trận xác định dương, sau đó sẽ lý giải cho hệ phương trình chuẩn, xuất hiện ở giải bài toán bình sai gián tiếp.

Phương pháp gradien căng để giải hệ phương trình có dạng

$$\underset{(n,n)}{N}\ \underset{(n,1)}{X} + \underset{(n,1)}{L} = \underset{(n,1)}{0} \qquad (2.8.28)$$

với N xác định dương, tìm lời giải X ở dạng tổ hợp tuyến tính từ các cột độc lập tuyến tính $P_1, P_2, ..., P_n$, với n là số hữu hạn.

Nói cách khác, lời giải cần tìm có thể biểu diễn dưới dạng

$$X = X_0 + \alpha_1 \overline{P}_1 + \alpha_2 \overline{P}_2 + ... + \alpha_n \overline{P}_n \ , \qquad (2.8.29)$$

ở đây α_i $(i = \overline{1,n})$ là số thực, còn X_0 là ma trận tuỳ ý thường bằng không.

Rõ ràng lời giải có thể biểu diễn qua tuần tự của nghiệm cải chính

$$X_K = X_{K-1} + \alpha_K \overline{P}_K \ . \qquad (2.8.29a)$$

Công thức (2.8.29a) nói rằng P_K có thể xây dựng đồng thời với việc nhận nghiệm X_K.

Thay (2.8.29) vào (2.8.28), nhận được

$$\alpha_1 N \overline{P}_1 + \alpha_2 N \overline{P}_2 + ... + \alpha_n N \overline{P}_n + \Delta_0 = 0 \ , \qquad (2.8.30)$$

Ở đây ta nhận như ở phương pháp gần đúng nhanh nhất ký hiệu

$$\Delta_0 = NX_0 + L \ .$$

Vì tuỳ chọn của $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n$ sẽ nhận, rằng dãy $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n$ thoả mãn điều kiện

$$\overline{P}^*_i N \overline{P}_j = 0 \ , \quad (i \neq j; i, j = \overline{1,n}) \qquad (2.8.31)$$

Nhân (2.8.30) bên trái với $\overline{P}^*_K$, nhận được với để ý đến (2.8.31)

$$\alpha_K \ \overline{P}^*_K N \overline{P}_K + \overline{P}^*_K \Delta_0 = 0 \ .$$

Vì vậy

$$\alpha_K = - \frac{\overline{P}^*_K \Delta_0}{\overline{P}^*_K N \overline{P}_K} \ . \qquad (2.8.32)$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng với điều kiện (2.8.31) P_K (K = 1, 2, ...) có thể nhận được tương quan

$$\overline{P}_{K+1} = \Delta_K + \beta_K \overline{P}_K , \tag{2.8.33}$$

ở đây

$$\Delta_K = NX_K + L , \tag{2.8.34}$$

còn β_K là số, tính theo công thức

$$\beta_K = -\frac{\overline{P}_K N\Delta_K}{P^*_K NP_K} . \tag{2.8.35}$$

Thật vậy, nhân (2.8.33) bên trái với $\overline{P}^*_K N$, để ý đến (2.8.31) nhận được

$$\overline{P}^*_K N\Delta_K + \beta_K P_K^* NP_K = 0$$

Từ đó trực tiếp có

$$\beta_K = -\frac{\overline{P}^*_K N\Delta_K}{\overline{P}^*_K N\overline{P}_K} . \tag{2.8.36}$$

Với để ý đến (2.8.34) có thể viết

$$\Delta_K = \Delta_{K-1} + N(X_K - X_{K-1}). \tag{2.8.37}$$

Khi sử dụng (2.8.29a) phương trình (2.8.37) có thể viết được dạng

$$\Delta_K = \Delta_{K-1} + \alpha_K N\overline{P}_K . \tag{2.8.38}$$

Viết chung lại các công thức nhận được

$$X_K = X_{K-1} - \frac{\overline{P}^*_K \Delta_0}{\overline{P}_K^* N\overline{P}_K} \overline{P}_K ,$$

$$\Delta_K = \Delta_{K-1} - \frac{\overline{P}^*_K \Delta_0}{\overline{P}_K^* N\overline{P}_K} N\overline{P}_K ,$$

$$\overline{P}_K = \Delta_{K-1} - \frac{\overline{P}^*_{K-1} N\Delta_{K-1}}{\overline{P}_{K-1} * N\overline{P}^*_{K-1}} \overline{P}_{K-1} , \qquad (2.8.39)$$

$$\overline{P}^*_i NP_j = 0 \ (i \neq j).$$

Phương trình /2.8.38/ có thể biểu diễn ở dạng

$$\Delta_K = \Delta_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i N\overline{P}_i \qquad (2.8.40)$$

Nhân (2.8.40) bên trái với P^*_K nhận được khi có để ý đến phương trình cuối cùng của (2.8.39) và (2.8.32)

$$\overline{P}^*_K \Delta_K = \overline{P}^*_K \Delta_0 + \alpha_K \overline{P}^*_K N\overline{P}_K =$$

$$= \overline{P}^*_K \Delta_0 - \overline{P}^*_K \Delta_0 \frac{\overline{P}^*_K N\overline{P}_K}{\overline{P}^*_K N\overline{P}_K} .$$

Vì vậy

$$\overline{P}^*_K \Delta_K = 0 , \qquad (2.8.41)$$

và tổng quát cho $K = \overline{1,n}$.

Công thức (2.8.41) lột tả tính chất quan trọng của phương pháp gradien căng. Tên của phương pháp nói rằng, sự khác biệt Δ_i thể hiện gradien của hàm sai số

$$X = X_i \ (\Delta = - \frac{\partial f(x_i)}{\partial y_i}) .$$

Ở hai công thức đầu của (2.8.39) số hạng $\overline{P}^*_K \Delta_0$ có thể thay thích hợp với $\overline{P}^*_K \Delta_{K-1}$ .Sự thay thế này không những thuận lợi cho tính và lập trình, mà còn dẫn đến nghiệm, ít sai hơn do việc làm tròn số. Để chỉ rằng việc thay thế là khả dĩ, ta viết phương trình (2.8.40) ở dạng

$$\Delta_{K-1} = \Delta_0 + \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i N\overline{P}_i . \qquad (2.8.42)$$

Sau khi nhân (2.8.42) phía trái với $\overline{P}^*_K$ và để ý đến phương trình cuối cùng của (2.8.39), nhận được

$$\overline{P}^*_K \Delta_{K-1} = \overline{P}^*_K \Delta_0 , \qquad (2.8.43)$$

điều mà chúng ta muốn chứng minh.

Khả năng tiếp sau thay đổi công thức cơ bản (2.8.39) của phương pháp.

Nhân phương trình thứ ba của (2.8.39) phía trái với Δ^*_{K-1}, với chú ý (2.8.41) nhận được quan hệ

$$\Delta^*_{K-1} \overline{P}_K = \Delta^*_{K-1} \Delta_{K-1} . \qquad (2.8.44)$$

Bây giờ sẽ đến tính chất quan trọng khác của phương pháp: sẽ chứng minh rằng $\Delta^*_{K-1}\Delta_K = 0$, tức hai giá trị liên tiếp trực giao nhau (như ở phương pháp gần đúng nhanh nhất).

Thật vậy xuất phát từ phương trình

$$\Delta_K = \Delta_{K-1} - \frac{\overline{P}^*_K \Delta_{K-1}}{\overline{P}^*_K N\overline{P}_K} N\overline{P}_K ,$$

sau khi nhân phía trái với Δ^*_{K-1}, nhận được

$$\Delta^*_{K-1} \Delta_K = \Delta^*_{K-1}\Delta_{K-1} - \frac{\overline{P}^*_K \Delta_{K-1}}{\overline{P}^*_K N\overline{P}_K} \Delta^*_{K-1} N\overline{P}_K . \qquad (2.8.45)$$

Nhưng từ phương trình (2.8.33) được

$$\overline{P}_K = \Delta_{K-1} + \beta_{K-1} \overline{P}_{K-1} ,$$

Từ đó sau khi nhân bên trái với $\overline{P}^*_K N$, với để ý (2.8.31) nhận được

$$\overline{P}^*_K N \overline{P}_K = \overline{P}^*_K N\Delta_{K-1} .$$

Phương trình trên có thể viết ở dạng

$$\overline{P}^*_K N \overline{P}_K = \Delta^*_{K-1} N \overline{P}_K , \qquad (2.8.46)$$

vì $\overline{P}^*_K N\Delta_{K-1}$ là số và luôn luôn có thể biến chuyển, thiếu số đó sẽ ảnh hưởng đến công thức.

Với (2.8.46) phương trình (2.8.45) có thể biểu diễn ở dạng

$$\Delta^*_{K-1}\Delta_K = \Delta^*_{K-1}\Delta_{K-1} - \overline{P}^*_K \Delta_{K-1} . \qquad (2.8.47)$$

Nhưng với (2.8.44) phương trình (2.8.47) thay đổi vào

$$\Delta^*_{K-1}\Delta_K = \Delta^*_{K-1}\Delta_{K-1} - \Delta^*_{K-1}\Delta_{K-1} = 0 ,$$

là điều mà ta muốn chứng minh.

Bây giờ đưa ra dạng khác của hệ số β_K của (2.8.33). Khi để ý đến (2.8.46) có thể viết thay (2.8.35) dạng

$$\beta_K = -\frac{\overline{P}^*_K N\Delta_K}{\overline{P}^*_K N\Delta_{K-1}} = -\frac{\Delta^*_K NP_K}{\Delta^*_{K-1} NP_K} . \qquad (2.8.48)$$

Nếu phương trình

$$\Delta_K = \Delta_{K-1} + \alpha_K NP_K$$

nhân tuần tự với Δ^*_K và Δ^*_{K-1} , cho α_K sẽ nhận hai dạng khác nhau. Khi để ý $\Delta^*_K\Delta_{K-1} = \Delta^*_{K-1}\Delta_K = 0$, nhận được

$$\alpha = \frac{\Delta^*_K \Delta_K}{\Delta^*_K N\overline{P}_K} = -\frac{\Delta^*_{K-1} \Delta_{K-1}}{\Delta^*_{K-1} N\overline{P}_K} ,$$

từ đó trực tiếp tìm được

$$-\frac{\Delta^*_K N\overline{P}_K}{\Delta^*_{K-1} N\overline{P}_K} = \frac{\Delta^*_K \Delta_K}{\Delta^*_{K-1} \Delta_{K-1}} .$$

Khi xem xét tương quan nhận được, biểu thức tại (2.8.48) có thể viết

$$\beta_K = -\frac{\Delta^*_K N\overline{P}_K}{\Delta^*_{K-1} N\overline{P}_K} = \frac{\Delta^*_K \Delta_K}{\Delta^*_{K-1} \Delta_{K-1}} . \qquad (2.8.49)$$

Bây giờ có thể biểu diễn các phương trình cơ bản của phương pháp ở dạng sau:

$$X_K = X_{K-1} - \frac{\Delta^*_{K-1}\Delta_{K-1}}{\overline{P}^*_K N\overline{P}_K}\overline{P}_K,$$

$$\Delta_K = \Delta_{K-1} - \frac{\Delta^*_{K-1}\Delta_{K-1}}{\overline{P}^*_K N\overline{P}_K}N\overline{P}_K, \qquad (2.8.50)$$

$$\overline{P}_K = \Delta_{K-1} + \frac{\Delta^*_{K-1}\Delta_{K-1}}{\Delta^*_{K-2}\Delta_{K-2}}\overline{P}_{K-1},$$

$$\Delta^*_K\Delta_{K-1} = 0 .$$

Bây giờ vận dụng lời giải trình bày vào bài toán bình sai gián tiếp. Với mục đích này, giả sử cho phượng trình sai số hiệu chỉnh chuẩn hoá

$$V = AX + F \qquad (2.8.51)$$

chuyển đến hệ chuẩn sau

$$A^*V = (A^*A)X + A^*F = 0 . \qquad (2.8.52)$$

Nói cách khác, với phương pháp gradien căng ta có

$$N = A^*A,$$

$$L = A^*F,$$

$$\Delta_K = A^*V_K , \qquad (2.8.53)$$

$$(V_K = AX_K + F).$$

Trong trường hợp này phương trình cơ bản của phương pháp này có thể biểu diễn dưới dạng

$$X_K = X_{K-1} - \frac{(A * V_{K-1}) * (A * V_{K-1})}{(A\overline{P}_K) * (A\overline{P}_K)}\overline{P}_K ,$$

$$\overline{P}_{K+1} = A * V_K + \frac{(A * V_K) * (A * V_K)}{(A * V_{K-1}) * (A * V_{K-1})}\overline{P}_K . \qquad (2.8.54)$$

$$\overline{P}_1 = A^*V_0 .$$

Trong phương trình (2.8.54) V_K được tính với công thức

$$V_K = AX_K + F \qquad (2.8.55)$$

hay xuất phát từ phương trình hiệu chỉnh chuẩn hoá chưa tuyến tính hoá.

Phương pháp gradien căng có ý nghĩa lớn cho tính toán trong trắc địa. Như thấy ở công thức (2.8.54) với gần đúng dần không cần phải thành lập phương trình chuẩn. Điều đó một mặt cho phép giảm tối đa bộ nhớ, đặc biệt khi chỉ ghi những hệ số khác không của phương trình hiệu chỉnh chuẩn hoá.

Việc tính toán bắt đầu với tính V_0 theo công thức (2.8.55) trên cơ sở chấp nhận X_0 và xác định $\overline{P}_1$ theo công thức thứ ba trong (2.8.54). Khi sử dụng hai công thức đầu trên trong (2.8.54) và (2.8.55), tính theo tuần tự

X_1, V_1

$\overline{P}_2, X_2, V_2$

$\overline{P}_3, X_3, V_3$

.....

Việc tính tiếp tục cho đến khi

$$\frac{1}{n}(X_K - X_{K-1})^*(X_K - X_{K-1}) \le \varepsilon , \qquad (2.8.56)$$

Ở đây ε là số dương đủ nhỏ, xác định độ chính xác của việc tính toán. Quá trình hội tụ nhanh và thông thường việc tính chấm dứt trước bước lặp n. Với nghiệm không ổn định số lần lặp cần thiết để đạt (2.8.56) có thể vượt quá n.

Phương pháp trình bày có thể tìm ứng dụng ở bình sai mạng trắc địa khi trị gần đúng của ẩn (ví dụ tọa độ các điểm

cần xác định) tương đối thô. Trong trường hợp này cần thiết mỗi một bước lặp tính hệ số mới của phương trình sai số. Điều này đặc biệt ý nghĩa cho bình sai mạng không gian ảnh, ở đấy tọa độ các điểm của mạng biết được tương đối thô (với độ chính xác đến hàng mét).

So sánh công thức (2.8.50) với (2.8.24) nói nên rằng lần lặp thứ K ở phương pháp gần đúng nhanh nhất trùng với lần thứ nhất ở phương pháp gradien căng.

Phương pháp gradien căng mà ta sẽ xét, nó thường gặp trong các tài liệu tính toán trắc địa.

Chương 3

MÔ HÌNH SỐ ĐỊA HÌNH VÀ ỨNG DỤNG CỦA NÓ TRONG TỰ ĐỘNG HOÁ THIẾT KẾ QUY HOẠCH ĐỨNG

Trước hết ta đưa vào một vài định nghĩa sẽ dùng sau này.

Định nghĩa 1: Hệ thống - Tập hợp các thành phần liên kết tương hỗ, trong lý thuyết nhận biết các thành phần ấy có thể xem như những đơn vị riêng biệt.

Định nghĩa 2: Mô hình - Một đặc thù, hình thức đa dạng chất lượng sử dụng trong lý thuyết nhận biết mô tả một hệ thống thực thể hay trừu tượng nào đó. Mô hình phản ánh khách quan thực trạng của hiện vật , hiện tượng hay quá trình được quan sát và ghi nhận những quan hệ lẫn nhau giữa các thành phần của mô hình đó. Ở đây sẽ quan tâm đến các mô hình tĩnh, với nó đối tượng nghiên cứu ở thời điểm xác định.

Định nghĩa 3: Mô hình địa hình - Hình ảnh thực về địa hình của vùng đã cho, được tạo bởi con người với sự hỗ trợ của phương tiện tạo bởi con người. Mô hình địa hình tương ứng mục đích thành lập, có mức độ khác nhau về tổng quát.

Mô hình địa hình gồm:

- Đồ họa, khi biểu diễn qua hình ảnh đồ họa (bản đồ, bình đồ).

- Số, khi biểu diễn qua tập hợp dữ liệu số đã mã hoá, sắp xếp theo một quy tắc xác định.

- Giải tích, khi biểu diễn tập hợp các mảnh đồ hình, mô tả qua biểu diễn giải tích dạng f(X, Y, H) = 0, ở đây X, Y là tọa độ phẳng; H là độ cao.

Mô hình địa hình chứa thông tin về mặt đất và những chi tiết. Vì thế thường nói mô hình mặt đất (nhiều khi vẫn gọi luôn mô hình địa hình) và mô hình chi tiết.

Trong phần này đối tượng ta xem xét sẽ là mô hình địa hình như là một quan điểm cho cách nhìn mô hình của mặt đất.

Mô hình số mặt địa hình (chính xác là mô hình số mặt đất, cách gọi phổ thông nhất mà ta chấp nhận dùng) thực tế là sự biểu diễn rời rạc mặt địa hình. Thành phần của mô hình số mặt địa hình là những điểm trên mặt đất được cho bởi ba tọa độ X, Y, H trong một hệ tọa độ xác định nào trước đó. Những điểm này có thể phân bố tuỳ ý (như ở bình đồ) hay điểm nút của một mạng lưới hình nào đó (thường hình chữ nhật hay hình vuông, hình tam giác). Và trong cả hai trường hợp, điểm phân bố rời rạc, điểm được xếp đặt - mô hình số cần phải đáp ứng thoả mãn mục tiêu mà nó được thành lập. Trong mục này ta xây dựng các thuật toán cho tự động hóa thực hiện các thiết kế quy hoạch đứng. Nhằm mục đích này mô hình số địa hình cần biểu diễn hệ thống các điểm được xắp đặt (điểm nút mạng hình vuông) với độ dày cần thiết đủ cho việc thiết kế.

Biểu diễn giải tích (mô hình giải tích) của mặt đất có thể sử dụng ở một vài bài toán thiết kế. Ở trường hợp này hàm ẩn f(X, Y, H) thay thế hàm hiện H = F(X, Y). Thông thường mô hình mặt đất giải tích cho dưới dạng đa thức bậc của X và Y.

$$H = a_{00} + a_{10}X + a_{01}Y + a_{20}X^2 + a_{02}Y^2 + a_{11}XY + ... \qquad (3.1)$$

Ở trong đó hệ số a_{ij} xác định theo phương pháp bình phương tối thiểu, khi sử dụng một số điểm giới hạn điểm mặt đất với tọa độ đã biết $(X, Y, H)_K$.

Khi công thức giải tích đã cho biểu diễn địa hình đối với diện tích rộng, mô hình giải tích khác nhiều với bề mặt nguyên thể, thì khi đó biểu diễn toán học bắt đầu khó khăn. Chính vì vậy mô hình số địa hình được các nhà thiết kế ưa dùng.

Khi nói mô hình số địa vật chi tiết, cần hiểu sự biểu diễn điểm, đường, vùng xác định chi tiết địa vật của lãnh thổ đó. Ở đây mỗi một điểm hay tập hợp tất cả các điểm cần phải thể hiện thông tin về địa vật.

Mô hình số địa vật có thể mặt bằng khi các điểm chi tiết cho tọa độ phẳng (X, Y), có thể không gian khi điểm chi tiết cho cả ba tọa độ (X, Y, H). Các đường đặc trưng địa hình (tụ thuỷ và phân thuỷ) có thể bao quát như là các đường địa vật. Chúng cần biểu diễn dạng không gian. Đối với những đường địa vật (ranh giới hành chính...) thường biểu diễn trong tọa độ phẳng.

Độ dày của điểm mà mô hình cho một đối tượng xác định độ chính xác của mô hình. Vì vậy trong khi mô hình đồ họa độ chính xác xác định bởi tỷ lệ, còn mô hình số xác định bởi độ dày của điểm, nó như là một cơ sở cho mô hình tương ứng.

Như ở mô hình đồ họa xây dựng bản đồ tỷ lệ bé hơn thực hiện liên biên đối tượng hiển thị. Cũng như thế với mô hình số đồng thời giảm độ chính xác khi thực hiện liên biên, việc này làm giảm số lượng điểm đã cho của mô hình tương ứng. Những điều này cho một sự tương ứng rõ thấy giữa mô hình số và mô hình đồ họa, từ kinh nghiệm làm việc ở mô hình đồ họa chuyển sang làm việc với mô hình số.

Tiếp theo ta sẽ dừng lại các vấn đề tạo lập mô hình số địa hình ở dạng lưới bình đồ vuông.

3.1. KHẢ NĂNG THÀNH LẬP MÔ HÌNH SỐ ĐỊA HÌNH

Các phương pháp chủ yếu cho đo vẽ địa hình áp dụng nhiều nhất là toàn đạc, phương pháp đo vẽ ảnh.

Ở phương pháp toàn đạc đo vẽ số lượng điểm mặt đất giới hạn. Những điểm này bố trí ở các chỗ đặc trưng và các đường đặc trưng địa hình. Trực tiếp đo tọa độ cực không gian - góc bằng, góc đứng và khoảng cách nghiêng (hoặc bằng).

Nhưng tọa độ cực này đối với trạm tương ứng - điểm cứng có tọa độ trong hệ chung (X, Y, H). Với xử lý bằng tay các số liệu nhận được, sau khi đưa lên bản vẽ điểm chi tiết, tính độ cao H và tiếp đến nội suy đường bình độ, và như vậy quá trình xử lý địa hình kết thúc.

Ở phương pháp ảnh truyền thống trước hết tạo lập mô hình lập thể với máy đo vẽ ảnh và tiếp đến trong quá trình quan sát mô hình, với các điểm cùng độ cao vẽ nên đường bình độ, hay đọc tọa độ máy không gian của điểm xác định.

Đó là những nguyên tắc chính trong con đường chung của hai phương pháp đo vẽ cơ bản.

Trong quá trình tự động hoá thành lập bản đồ và trong quá trình biểu diễn địa hình những nguyên tắc trên cũng cần thay đổi. Với sử dụng máy tính thì thông tin vào có tính chất cụ thể rời rạc.

Ở phương pháp toàn đạc thông tin thu thập ban đầu rời rạc nhưng quy vào một hệ tọa độ - nối kết qua trạm đo tương ứng, còn các điểm chi tiết rải ra.

Hệ tọa độ thống nhất thích hợp nhất là hệ tọa độ bản đồ - tọa độ phẳng X, Y và độ cao H. Trong hệ này cũng lưu giữ các tọa độ của trạm đo toàn đạc - thông thường nhất là điểm đường chuyền. Việc tính chuyển những thông tin đầu tiên - hướng góc bằng, khoảng cách, góc đứng vào hệ tọa độ thống nhất thực hiện theo những công thức đơn giản vì không có một khó khăn gì về nguyên tắc với máy tính. Nói cách khác với sử dụng phương pháp toàn đạc có thể nói rằng việc rải tọa độ (X,Y,H) với số lượng giới hạn, tạo thành một mô hình số.

Ở phương pháp ảnh vấn đề phức tạp hơn. Ở đây thông tin đầu tiên là - ảnh, mô hình - có đặc tính liên tục. Để có thông tin rời rạc (tọa độ của số lượng điểm giới hạn trong một hệ tọa độ thống nhất), thông tin đầu tiên cần xử lý cơ bản. Khả năng thứ nhất liên quan đến phương pháp ảnh truyền thống /sử dụng máy móc analog. Trên mô hình lập thể đọc "tọa độ" máy của các điểm, và chuyển về tọa độ trắc địa (X,Y,H). Khả năng thứ hai đi liền với phương pháp giải tích, tọa độ hình ảnh, theo phương pháp giải tích ảnh nhận được tọa độ không gian trắc địa (X,Y,H). Phương pháp ảnh này rất thuận tiện cho xử lý tự động theo công nghệ và máy móc hiện đại.

Và như thế hai phương pháp cơ bản thành lập bản đồ cho phép tạo thông tin rời rạc địa hình - tập hợp giới hạn điểm có tọa độ (X,Y,H). Những điểm này cho rằng có đủ chất lượng, để đưa vào những thông tin cần thiết tạo lập mô hình cho mặt đất.

Về một số đặc tính kỹ thuật, người thiết kế sử dụng tỷ lệ bản đồ tương ứng như giải loại bài toán đo lường (từ độ dốc trung bình, với độ dốc cố định) hay tìm lời giải tối ưu thiết kế (đào, đắp tối ưu trong công trình v.v..).

3.2. CẤU TRÚC MÔ HÌNH SỐ ĐỊA HÌNH VÙNG RỘNG LỚN

Mô hình số địa hình theo độ chính xác là thể hiện mặt địa hình tương ứng với độ chính xác bản đồ địa hình tỷ lệ lớn, trên đó thể hiện tất cả thiết kế ban đầu của các công trình (dạng đường, tưới tiêu, quy hoạch, v.v..). Với vùng rộng lớn mô hình số địa hình có thể phân chia thành các phần nhỏ tương tự như phân chia mảnh bản đồ. Lãnh thổ bé nhất, coi như đơn vị cơ bản của mô hình địa hình khu vực lớn cần có hình cân đối (chữ nhật, hình vuông), phụ thuộc vào những đảm bảo kỹ thuật và những nhiệm vụ trên mô hình số cần giải quyết.

Cơ sở mô hình số địa hình (thông tin ban đầu) là độ cao và tọa độ của các điểm chi tiết, độ chính xác cần tương ứng bản đồ tỷ lệ lớn ví dụ 1:5.000. Trong trường hợp phục vụ công trình, bản đồ cần tỷ lệ lớn hơn. Ở đây ta không đi sâu vào vấn đề này (về tỷ lệ bản đồ).

Và như thế, bước tiếp theo từ mạng các điểm chi tiết với khoảng cách trung bình giữa chúng là S_{tb}, cần thành lập mô hình số mặt đất ở dạng lưới ô vuông với cạnh là D, sao cho mô hình số nhận được có độ chính xác tương đương với mô hình gốc. Điều đó cũng cần $D < S_{tb}$. Với rất nhỏ của D thì khối lượng thông tin tăng rất nhanh, mà không tăng độ chính xác. Thực tế kinh nghiệm chỉ ra rằng

$$\frac{S_{tb}}{5} \leq D \leq \frac{S_{tb}}{3}.$$

Giới hạn trên của D dùng trong trường hợp địa hình tương đối bằng phẳng, và giới hạn với địa hình vùng đồi núi.

3.3. PHƯƠNG PHÁP THÀNH LẬP MÔ HÌNH SỐ ĐỊA HÌNH

Ở đây chỉ trình bày tương đối đầy đủ phương pháp lưới hình vuông. Còn phương pháp lưới tam giác được đề cập rải rác trong tập sách này.

Tương ứng với những điều nói trên, ta giả sử với khu vực xác định T có các điểm phân bố rời rạc các điểm có tọa độ (X,Y,H) được xác định theo phương pháp toàn đạc hay phương pháp ảnh. Những điểm này ta gọi là những điểm đã cho hay điểm gốc. Bây giờ trên lãnh thổ này ta phủ mạng hình vuông với cạnh là D và song song với trục hệ tọa độ. Để đơn giản mạng lưới nằm trong một hình chữ nhật với cạnh DX và DY (hình 3.3.1) , sao cho tương đương i song song với trục Y, còn j song song với trục X.

Ta nhận rằng đánh số đường i, j là

$$i = 1, 2, \ldots, IMAX;$$

$$j = 1, 2, \ldots, JMAX.$$

Tọa độ của các giao điểm giữa đường i và đường j ký hiệu X_{ij} , Y_{ij} . Độ cao của điểm là H_{ij} .

Nếu tọa độ của điểm (i = 1, j = 1) ký hiệu với X_1 , Y_1 thì ta có

$$X_{ij} = X_1 + (i-1)D \ , \ (j = 2, JMAX)$$

$$Y_{ij} = Y_1 + (j-1)D \ , \ (i = 2, IMAX) \qquad (3.3.1)$$

Giữa I MAX, J MAX, DX, DY, và D có quan hệ

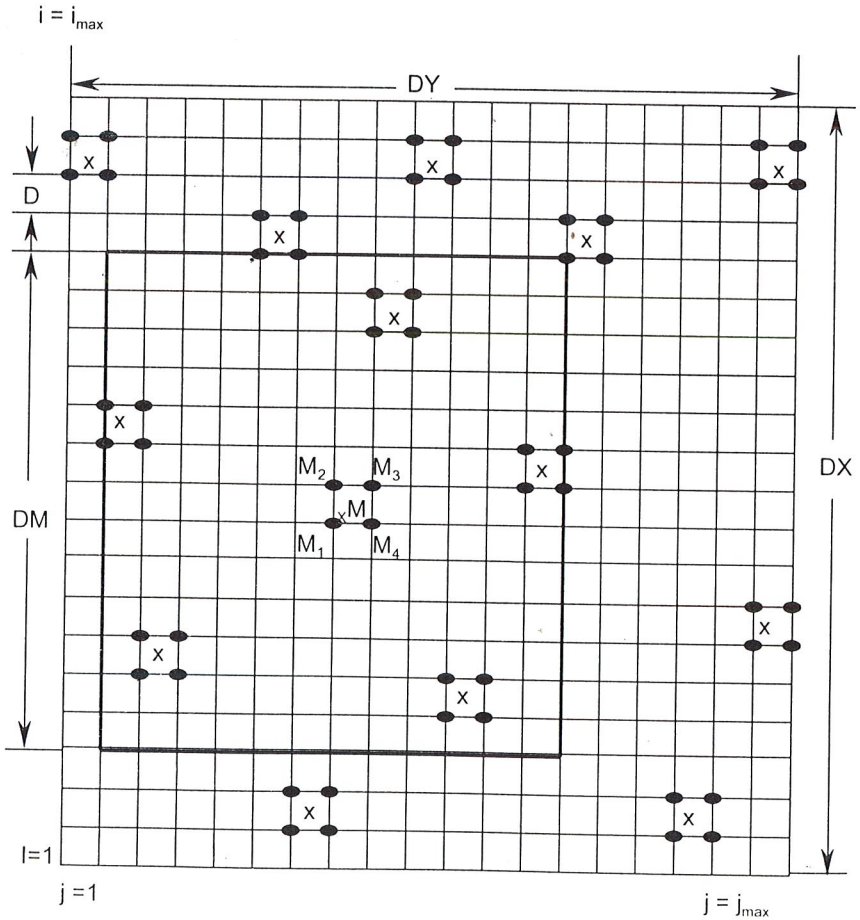
$$I\ MAX = DX / D + 1,$$

$$J\ MAX = DY/ D + 1. \qquad (3.3.2)$$

Nếu điểm đã cho rải rác tương đối đều trên toàn lãnh thổ trong phân vi i = 1, i = I MAX, j = 1, j = J MAX và nếu có số

lượng là N, thì khoảng cách trung bình S_{tb} giữa các điểm đã cho có thể viết

$$S_{tb} = \sqrt{\frac{DX.DY}{N}} \qquad (3.3.3)$$



Hình 3.3.1. **Trường local (địa phương) của điểm M.**

Trong đó: x : Điểm đã cho
⊕: Điểm khống chế
+: Điểm chi tiết

Điểm nút của mạng lưới hình vuông là đỉnh các hình vuông, mà trong đó có điểm đã cho gọi là các điểm khống chế. Độ cao các điểm này xác định từ các điểm đã cho. Ở hình 3.3.1 các điểm khống chế đánh dấu các dấu tròn đen nhỏ. Tất cả những điểm còn lại gọi là điểm chi tiết. Độ cao của chúng sẽ xác định từ các điểm khống chế.

Mô hình số địa hình tối ưu nhất là được thành lập từ các phần tử tam giác không cắt nhau. Các phần tử tam giác thành lập theo tiết 4.2.3.1. Phương pháp nội suy trình bày ở chương một.

3.3.1. Xác định độ cao của các điểm khống chế

Giả sử điểm đã cho M tương ứng với các điểm khống chế M1, M2, M3 và M4 hình 3.3.1. Vấn đề là xác định độ cao các điểm M1, M2, M3 và M4 như thế nào.Rõ ràng là ảnh hưởng lớn nhất đến các điểm này là điểm M. Để giải bài toán, xung quanh điểm M tạo một trường địa phương hình vuông với cạnh là DM, sao cho điểm M gần trung tâm trường này. Ở hình 3.1.1 trung tâm của trường địa phương của điểm M trùng với điểm M1. Trường địa phương (trường local) không nên kích thước lớn, vì xa điểm M không ảnh hưởng đến tính độ cao các điểm M1, M2, M3 và M4. Thích hợp là

$$2S_{tb} < DM < 4S_{tb} .$$

Nếu mảnh hình vuông ở lưới hình vuông với kích thước rất nhỏ ($D << S_{tb}$) có thể đặt

$$H_{M1} = H_{M2} = H_{M3} = H_{M4} = H_M . \qquad (3.4.4)$$

Trường hợp mảnh hình vuông nhỏ, nhưng chưa phải đến mức rất nhỏ, cũng có khả năng nhận tương quan (3.4.4).

Ta giả sử rằng trong trường local cho điểm M tạo thành tập hợp ZM = {Z1, Z2, ..., ZN}. MK xem như "tên" của điểm nào đó M1, M2, M3, M4, độ cao của MK sẽ xác định như là trung bình tổng thể độ cao tập hợp điểm ZM theo công thức

$$H_{MK} = \frac{[H_{ZM} P_{ZM}]}{[P_{ZM}]}, \qquad (3.3.5)$$

Ở đây P_{ZM} là trọng số của độ cao H_{ZM}, nó xác đinh mức độ ảnh hưởng của H_{ZM} lên H_{MK} . Nếu S_{ZM} ký hiệu khoảng cách giữa điểm xác định MK và mỗi một điểm đã cho của tập hợp ZM, khi đó trọng số P_{ZM} có thể nhận ba phương án:

$$P^{I}_{ZM} = \frac{1}{S_{ZM}}, P^{II}_{ZM} = \frac{1}{S^2_{Zm}}, P^{III}_{ZM} = \frac{1}{\sqrt{S_{ZM}}}. \qquad (3.3.6)$$

Những khảo sát kinh nghiệm chỉ rằng thích hợp nhất làm việc với P^{II}_{ZM} .

Cũng có khả năng các phương pháp khác để xác định điểm khống chế. Ví dụ với mỗi trường local có thể sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu cho loại (3.1) và xác định độ cao cho bốn điểm khống chế. Nhưng phương pháp này không được ưa chuộng vì nhiều trường hợp (đặc biệt địa hình phức tạp) mặt nội suy bằng đa thức (3.1) có thể khác xa mặt địa hình, kể cả trong lân cận điểm M. Mô hình mặt đất sử dụng bằng phương pháp này để mô tả sẽ bị biến dạng mạnh.

3.3.2. Xác định độ cao của điểm chi tiết

Sau khi độ cao các điểm khống chế đã xác định, tiến đến xác định độ cao của điểm chi tiết. Các điểm khống chế nằm gần điểm đã cho và hình thành đường đặc trưng địa hình. Điểm chi tiết cần xác định rời rạc một mặt trơn, nối liền với điểm khống

chế. Tìm một biểu diễn giải tích cho mặt địa hình qua đa thức (3.1) khó cho kết quả tốt. Vì thế thích hợp hơn là mặt thoả mãn phương trình vi phân nào đó, đảm bảo trơn của mặt mô hình. Phương trình vi phân như thế, có thể nhận là phương trình Laplace:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} = 0 . \qquad (3.3.7)$$

Sẽ trình bày phương trình này giải bằng số như thế nào.

Trước hết sẽ chỉ ra cách nhận các đạo hàm

$$H_X = \frac{\partial H}{\partial X}, H_{XX} = \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} .$$

Hàm $H(X,Y_0)$ trong lân cận điểm (X_0, Y_0) có thể biểu diễn dưới dạng

$$H(X,Y_0) \approx H(X_0,Y_0) + (X - X_0).H_X(X_0,Y_0) . \qquad (3.3.8)$$

Giải (3.3.8) theo $H_X(X_0,Y_0)$ nhận được

$$H'_X(X_0,Y_0) \approx \frac{H(X_0 + h, Y_0) - H(X_0, Y_0)}{h} , \qquad (3.3.9)$$

ở đây ta đặt $X = X_0 + h$.

Tương tự với $X = X_0 - h$ sẽ có

$$H''_X(X_0,Y_0) \approx \frac{H(X_0, Y_0) - H(X_0 - h, Y_0)}{h} . \qquad (3.3.10)$$

Công thức (3.3.10) thể hiện H_X qua phần vi phân bên trái, còn (3.3.9) qua phần vi phân bên phải.

Với vi phân, thể hiện H_{XX} sẽ có

$$H_{XX}(X_0,Y_0) \approx \frac{H_X(X_0 + h, Y_0) - H_X(X_0, Y_0)}{h} . \qquad (3.3.11)$$

Rõ ràng (3.3.11) cho ta phần vi phân phải.

Nếu trong công thức này thay thế phần vi phân phải H'_X kết quả H_{XX} sẽ là "thay đổi bên phải". Để điều hoà sự thay đổi này, sẽ sử dụng phần vi phân trái H''_X, chính công thức (3.3.10). Đặt vào (3.3.10) X_0+h và chỗ X_0, sẽ có

$$H''_X(X_0+h,Y_0) \approx \frac{H(X_0+h,Y_0)-H(X_0,Y_0)}{h}, \qquad (3.3.12)$$

Thay (3.3.10) và (3.3.12) và (3.3.11) nhận được

$$H_{XX} \approx \frac{H(X_0+h,Y_0)-2H(X_0,Y_0)+H(X_0-h,Y_0)}{h^2}. \qquad (3.3.13)$$

Công thức (3.3.13) là đối xứng vì vậy có thể nói xê dịch bên trái hay bên phải.

Theo cách tương tự nhận được

$$H_{YY} \approx \frac{H(X_0,Y_0+k)-2H(X_0,Y_0)+H(X_0,Y_0-k)}{k^2}. \qquad (3.3.14)$$

Giả sử hàm H(x, y) cho bởi các điểm rời rạc trong mạng lưới chữ nhật. Khi đó thoả mãn phương trình (3.3.7) cần

$$H_{XX} + H_{YY} = 0, \qquad (3.3.15)$$

ở đây H_{XX} và H_{YY} sẽ tính theo (3.3.13) và (3.3.14), và rằng:

$$\begin{aligned} &H(X_0, Y_0) = H_{ij}, \\ &H(X_0+h, Y_0) = H_{(i+1)j}, \\ &H(X_0-h, Y_0) = H_{(i-1)j}, \\ &H(X_0, Y_0+k) = H_{i(j+1)}, \\ &H(X_0, Y_0-k) = H_{i(j-1)}, \end{aligned} \qquad (3.3.16)$$

Từ (3.3.15), (3.3.13) và (3.3.14) nhận được khi chú ý đến (3.3.16)

$$\frac{H_{(i+1)j} - 2H_{ij} + H_{(i-1)j}}{h^2} + \frac{H_{i(j+1)} - 2H_{ij} + H_{i(j-1)}}{k^2} = 0 . \quad (3.3.17)$$

với $k = h\lambda$, (3.3.18)

Từ (3.3.17) nhận được

$$\lambda^2 H_{(i+1)j} - 2\lambda^2 H_{ij} + \lambda^2 H_{(i-1)j} + H_{i(j+1)} - 2H_{ij} + H_{i(j-1)} = 0$$

hay cũng như vậy

$$H_{ij} = \frac{\lambda^2 \left[H_{(i+1)j} + H_{(i-1)j}\right] + H_{i(j+1)} + H_{i(j-1)}}{2\lambda^2 + 2} . \quad (3.3.19)$$

Nói cách khác, nếu mặt H(X,Y) thoả mãn phương trình Laplace (3.3.7), cần thiết là mỗi một nút của mạng thoả mãn điều kiện (3.3.17) hay đạo hàm của nó (3.3.19). Với mạng lưới hình vuông ($\lambda = 1$) điều kiện (3.3.19) sẽ là

$$H_{ij} = \frac{H_{(i+1)j} + H_{(i-1)j} + H_{i(j+1)} + H_{i(j-1)}}{4} . \quad (3.3.19a)$$

Phương trình (3.3.19), tương tự (3.3.19a), sử dụng cho giải bằng số bài toán truyền thống Diricle, nó được biểu hiện lời giải của phương trình vi phân Laplace

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0$$

Trong vùng R nào đó, với hàm biên

$$Z = F(X,Y)$$

đã biết.

Trong trường hợp của ta sử dụng công thức (3.3.19a), để đưa ra một quá trình lặp Gauss - Zaiđel để xác định độ cao các điểm chi tiết mạng lưới hình vuông. Mặt nhận được sẽ thoả mãn phương trình Laplace (3.3.7) chỉ với các điểm chi tiết. Với các điểm khống chế phương trình này không thoả mãn. Nhưng với

chúng ta nó không quan trọng, vì mục đích của chúng ta là "phủ" một mặt trơn trên lãnh thổ.

Có thể xây dựng một quá trình tính lặp, xác định bởi phương trình

$$H_{ij}^{(K)} = \frac{H_{(i+1)j}^{(K-1)} + H_{(i-1)j}^{(K-1)} + H_{i(j+1)}^{(K-1)} + H_{i(j-1)}^{(K-1)}}{4}; \qquad (3.3.20)$$

$$i = 2, 3, ..., IMAX - 1;$$

$$j = 2, 3, ..., JMAX - 1.$$

Rõ ràng khi điểm (i,j) trùng với điểm khống chế, tức độ cao đã xác định, việc tính theo (3.3.20) không thực hiện.

Với các điểm trong giới hạn lưới (i = 1, i = IMAX; j = 1, j = JMAX) việc tính thực hiện theo công thức thay đổi một ít. Dưới đây đưa ra các công thức, theo đó có thể thực hiện tính độ cao các điểm nút nằm trong giới hạn vùng T.

$$i = 1, j = 1;$$

$$H_{ij} = \frac{(H_{(i+1)j} + H_{i(j+1)})}{2} \qquad (3.3.20\text{-}1)$$

$$i = 1, j = JMAX;$$

$$H_{ij} = \frac{(H_{i(j-1)} + H_{(i+1)j})}{2} \qquad (3.3.20\text{-}2)$$

$$i = 1, 1 < j < JMAX;$$

$$H_{ij} = \frac{(H_{i(j-1)} + H_{i(j+1)} + H_{(i+1)j})}{3}. \qquad (3.3.20\text{-}3)$$

$$i = IMAX, j = 1;$$

$$H_{ij} = \frac{(H_{(i-1)j} + H_{i(j+1)})}{2}. \qquad (3.3.20\text{-}4)$$

$$i = IMAX, j = JMAX;$$

$$H_{ij} = \frac{(H_{(i-1)j} + H_{i(j-1)})}{2}. \qquad (3.3.20\text{-}5)$$

i = IMAX, 1 <j <JMAX;

$$H_{ij} = \frac{(H_{(i-1)j} + H_{i(j+1)} + H_{i(j-1)})}{3}. \qquad (3.3.20\text{-}6)$$

1 < i < IMAX, j = 1;

$$H_{ij} = \frac{(H_{(i+1)j} + H_{(i-1)j} + H_{i(j+1)})}{3}. \qquad (3.3.20\text{-}7)$$

1 <i < IMAX, j = JMAX

$$H_{ij} = \frac{(H_{(i-1)j} + H_{(i+1)j} + H_{i(j-1)})}{3}. \qquad (3.3.20\text{-}8)$$

1 < i < IMAX, 1 < j < JMAX;

$$H_{ij} = \frac{(H_{(i-1)j} + H_{(i+1)j} + H_{i(j-1)}) + H_{i(j+1)}}{4}. \qquad (3.3.20\text{-}9)$$

Quá trình tính lặp, mô tả bởi phương trình (3.3.20) có thể dừng nếu thoả mãn một chỉ tiêu thích hợp với độ chính xác xác định

$$\left|H_{ij}^{(K+1)} - H_{ij}^{K}\right| \le \varepsilon \qquad (3.3.21)$$

với $i = \overline{1, IMAX}; j = \overline{1, JMAX}$,

ở đây ε là số dương nhỏ, xác định mức độ lặp.

Công thức (3.3.20) bảo đảm giữa việc tính gần đúng dần của phương trình Laplace. Gần đúng dần tăng theo cùng việc tăng cạnh của mạng lưới ô vuông.

Thuật toán dẫn đến là mặt đất, phần lồi lên thì hạ xuống phần lõm xuống thì nâng lên.

Thực nghiệm về độ chính xác mô hình số xây dựng theo thuật toán này đã chỉ ra rằng chất lượng cao, thích ứng cho giải quyết những bài toán có tính chất kỹ thuật.

Giữa *độ dốc* của địa hình và *trị tuyệt đối* của sai số giữa độ cao các điểm chi tiết (ở trường hợp này là tại mắt lưới) *có phụ thuộc tương quan.*

Thuật toán vừa trình bày ứng dụng cho trường hợp các điểm phân bố trên lãnh thổ gần hình chữ nhật.

3.4. TỐI ƯU THIẾT KẾ QUY HOẠCH ĐỨNG

Hoạt động thực tiễn của các kỹ sư trắc địa liên quan đến các bản thiết kế khác nhau. Đó là thiết kế mạng trắc địa khống chế, quy hoạch đứng hay các công trình đường tuyến, v.v.. Mỗi bản thiết kế cần thoả mãn một yêu cầu xác định, và cùng với đó cũng cần tối ưu theo một quan điểm. Ở đây với sự trợ giúp của mô hình toán và lý thuyết tối ưu. Qua mô hình toán, quá trình thiết kế giải quyết vấn đề tự động hoá quá trình thiết kế - tối ưu. Chính vì vậy sẽ điểm qua mô hình toán cho tối ưu công việc. Thường gặp khó khăn nhất là nhiệm vụ thiết kế quy hoạch đứng. Còn các trường hợp khác thiết kế trắc địa ta thôi xem xét ở đây.

Bài toán thiết kế quy hoạch đứng có ý nghĩa lớn trong công trình thuỷ lợi, sân bay, trang trại, v.v..

Bề mặt thiết kế có thể là mặt phẳng hay mặt chung nhất. Trong tài liệu mô tả nhiều phương pháp khác nhau tự động hoá thiết kế các loại mặt. Trong mọi trường hợp vấn đề cơ bản là xác định chỉ tiêu tối ưu và đưa ra được một mô hình toán thích hợp. Ở đây ta không đi sâu vào bản chất kỹ thuật, mà nó thuộc bộ

môn "quy hoạch đứng" chúng ta sẽ xét quan điểm của thuật toán trong quá trình xây dựng hệ thống tự động hoá thiết kế.

Các phương pháp thiết kế có thể phân chia thành hai loại đoạn cơ bản - truyền thống và thuật toán hoá. Chất lượng của các thiết kế thực hiện theo các phương pháp truyền thống, phụ thuộc nhiều vào nội năng kỹ thuật của người thiết kế, và còn ảnh hưởng yếu tố chủ quan riêng của người thực hiện. Những phương pháp thuật toán dựa trên cơ sở mô hình toán và cùng một loại dữ liệu đầu vào đều cho một kết quả giống nhau.

Nhưng ngay cả trong thời đại kỹ thuật công nghệ phát triển cũng không thay thế được con người vì vậy những phương pháp thuật toán, trong những thời điểm "thắt nút" con người có thể can thiệp vào để "tư vấn" cho máy giải quyết đúng hơn.

Các phương pháp thuật toán cho thiết kế theo nguyên tắc cần khối lượng tính toán đáng kể và vì vậy nên thực hiện với trợ giúp của máy tính. Mỗi bản thiết kế theo phương pháp thuật toán cần thoả mãn chỉ tiêu nào đó về tối ưu và loạt điều kiện kinh tế - kỹ thuật. Sự can thiệp của con người cần ở chỗ xác định điều kiện biên, cũng có lúc không phải như chỉ cho máy xác định. Chỉ tiêu tối ưu cho việc phương pháp giải bằng thuật toán ở bài toán quy hoạch đứng thông thường là tối thiểu công việc đào đắp và dẫn đến tối thiểu chi phí lao động.

Trong các xem xét của ta, mặt địa hình được cho bởi mô hình số địa hình, lưới hình vuông với cạnh là D. Thông thường nhận D = 20m. Trong một vài trường hợp (để thuận lợi cho tính khối lượng đất) đáng lẽ làm việc với độ cao các điểm nút của lưới, có thể làm việc với độ cao của trọng tâm của các hình vuông con, ta sẽ sử dụng trường hợp thứ nhất, nhưng cũng có thể dễ dàng chuyển qua trường hợp thứ hai.

Quan hệ giữa tọa độ điểm nút mạng lưới hình vuông với đánh số i - đường, j - đường đã biết ở đầu tiết 3.3 [công thức (3.3.1) và (3.3.2)] và ta sẽ sử dụng sau này.

3.4.1. Thiết kế mặt phẳng

Giả sử trong vùng lồi T của mô hình số địa hình ta muốn là bằng sao cho mặt thiết kế là mặt phẳng.

Phương trình mặt phẳng thiết kế biểu diễn dưới dạng

$$H = AX + BY + C, \tag{3.4.1}$$

ở đây (X,Y) là tọa độ phẳng của điểm thực địa, còn H độ cao thiết kế. Với điểm tuỳ ý của mạng lưới hình vuông (i,j) có thể viết

$$H_{ij} = AX_{ij} + B_{ij} + C, \tag{3.4.1a}$$

ở đây (X,Y) xác định như ở (3.3.1).

Nếu ký hiệu H'_{ij} là độ cao mặt đất của điểm (i,j) và đưa vào đại lượng

$$V_{ij} = H_{ij} - H'_{ij}, \tag{3.4.2}$$

thì chú ý (3.4.1a) với V_{ij} có thể viết

$$V_{ij} = AX_{ij} + BY_{ij} + C - H'_{ij}, \tag{3.4.3}$$

Đại lượng V_{ij} gọi là độ cao làm việc. Để xác định tham số A, B, C của mặt phẳng thiết kế thường áp dụng phương pháp bình phương tối thiểu

$$\sum_{(i,j)\in T} V_{ij}^2 = \min. \tag{3.4.4}$$

Bài toán (3.4.3,4) trùng với bài toán bình sai gián tiếp, không có gì mới đối với chúng ta. Điều kiện (3.4.4) không dẫn đến tối thiểu (min) đào đắp và không đặt bài toán vào tiêu chí

kỹ thuật trong trường hợp này. Ta chỉ nhận được một mặt thiết kế tiến gần đến mặt địa hình. Vì vậy ta sẽ không áp dụng phương pháp bình phương tối thiểu, và tương ứng điều kiện (3.4.4) đặt

$$\sum_{(i,j)\in T} |V_{ij}| = \min, \qquad (3.4.5)$$

bao hàm như là hàm mục tiêu của bài toán mới, bài toán giải với phương pháp tối ưu tuyến tính. Mặt khác điều kiện bài toán cho phép đặt thêm một vài giới hạn tuyến tính, phát sinh từ bản chất kỹ thuật.

Một số tác giả đưa vào trọng số, đại diện cho độ cao làm việc, như thế ở (3.4.5) điều kiện tối ưu của mặt thiết kế đưa đến dạng

$$\sum_{(i,j)\in T} P_{ij}|V_{ij}| = \min , \qquad (3.4.5a)$$

ở đây P_{ij} là thành phần trọng số (hệ số đại diện).

Thông thường trọng số cho các điểm ở đường biên nhận là 1/2, còn tất cả các điểm khác (phía trong) nhận $P_{ij} = 1$.

Thay (3.4.3) vào (3.4.5) nhận được

$$\sum_{(i,j)\in T} |AX_{ij} + BY_{ij} + C - H'_{ij}| = \min. \qquad (3.4.6)$$

Phương trình (3.4.6) là tiêu chí cần tìm cho tối ưu. Điều kiện trên xuất phát từ yêu cầu kỹ thuật đặt ra cho mặt thiết kế. Ví dụ theo quan hệ của độ nghiêng đặt điều kiện

$$JX_{min} \leqslant |A| \leqslant JX_{max} ,$$
$$JY_{min} \leqslant |B| \leqslant JY_{max} , \qquad (3.4.7)$$

Ở đây JX và JY là độ nghiêng theo hướng của trục tọa độ, nó có thể được lấy theo yêu cầu người thiết kế.

Ở các điều kiện trên, như ta thấy tham gia trị tuyệt đối của các ẩn số. Những bất phương trình này không có tuyến tính và nảy sinh những khó khăn phụ về nguyên tắc. Chúng dễ vòng vèo, nếu sơ bộ biết dấu của ẩn số. Thông số này có thể nhận được từ một lời giải ban đầu qua một lời giải theo phương pháp bình phương tối thiểu.

Thông thường đặt độ sâu của cắt bỏ lớp mặt đất không vượt quá một đại lượng xác định C_p, ví dụ $C_p = 15cm$. Biểu thức toán học của việc này qua bất đẳng thức $H_{ij} \geq H'_{ij} - C_p$ hay

$$AX_{ij} + BY_{ij} + C - H'_{ij} + C_p \geq 0 . \qquad (3.4.8)$$

Theo cách tương tự xem xét điều kiện cho độ cao cực đại của đắp lên. Trong những trường hợp cụ thể với vài điểm mạng lưới hình vuông, ký hiệu là K, đặt điều kiện dạng

$$H_K \leq \overline{H}_K \text{ hay } H_K \geq \overline{H}_K$$

Ở đây $\overline{H}_K$ là độ cao đã cho. Tương tự điều kiện này biểu diễn dưới dạng

$$AX_K + BY_K + C - \overline{H}_K \leq 0 ,$$

hay

$$AX_K + BY_K + C - \overline{H}_K \geq 0 . \qquad (3.4.9)$$

Để đảm bảo cân bằng công việc đào đắp đất đá, có thể đặt điều kiện

$$\sum_{(i,j)\in T} V_{ij} = 0 , \qquad (3.4.10)$$

hay

$$\sum_{(i,j)\in T} P_{ij}V_{ij} = 0 , \qquad (3.4.11)$$

Ở đây P_{ij} là trọng số được xác định đại diện cho độ cao tại điểm (i, j).

Điều kiện (3.4.10) biểu diễn dưới dạng

$$\sum_{(i,j)\in T} (AX_{ij} + BY_{ij} + C - H'_{ij}) = 0$$

hay cũng thế

$$A[X] + B[Y] + IMAX.JMAX.C - [H'] = 0. \qquad (3.4.12)$$

Với hệ tọa độ gốc ở trọng tâm của hệ thống điểm chi tiết, tức khi

$$[X] = [Y] = 0$$

điều kiện (3.4.12) dẫn đến xác định sơ bộ của tham số C từ phương trình

$$C = \frac{[H']}{IMAX.JMAX}$$

Vì thế điều kiện (3.4.12) dẫn đến giảm các tham số tự do từ 3 xuống 2. Khi tối ưu thiết kế thực hiện trên cơ sở điều kiện (3.4.5), không cần thiết đặt giới hạn (3.4.12).

Và như thế bài toán không trùng với bài toán chung quy hoạch tuyến tính, vì chỉ tiêu tối ưu (hàm mục tiêu) yêu cầu cực tiểu tổng trị tuyệt đối.

Biểu diễn toán học của bài toán ở dạng chung nhất, cho các hàm tuyến tính [xem (3.4.3)].

$$\eta_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + a_i , \qquad (3.4.13)$$
$$i = 1, 2, ..., r$$

và hệ bất phương trình tuyến tính - nhưng hạn chế [xem (3.4.7); (3.4.8); (3.4.9)]

$$\xi_i = b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + ... + b_{jn}x_n \le b_j , \qquad (3.4.14)$$
$$j = 1,2,...,q ; \quad q > n$$

tìm các ẩn $x_1, x_2, ..., x_n$ với cực tiểu hàm

$$z = \sum_{i=1}^{n} |\eta_i| , \qquad (3.4.15)$$

Để đưa bài toán này về bài toán chung quy hoạch tuyến tính, sẽ đưa ẩn dương thêm $y_1, y_2, ..., y_n$ sao cho

$$|\eta_i| \le y_i$$

hay cũng vậy

$$y_i + \eta_i \ge 0,\ y_i - \eta_i \ge 0 ; \qquad (3.4.16)$$

$$i = 1, 2, ..., r.$$

Trong trường hợp này chỉ tiêu cho tối ưu (hàm mục tiêu) là

$$z' = \sum_{i=1}^{r} y_i = \min \qquad (3.4.17)$$

với điều kiện

$$\begin{aligned} &y_i + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + a_i \ge 0 , \\ &y_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n - a_i \ge 0 , \\ &b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + ... + b_{jn}x_n + b_j \le 0, \\ &y_i \ge 0;\ i = \overline{1,r}\ ;\ j = \overline{1,q}\ ,\ q > n. \end{aligned} \qquad (3.4.18)$$

Bài toán (3.4.17) và (3.4.18) đã là bài toán quy hoạch tuyến tính và lời giải có thể thực hiện theo phương pháp Ximplec.

Cuối cùng sẽ làm một số lưu ý về khả năng tối ưu mặt phẳng thiết kế. Như điều đã nói ở tiết này, mặt phẳng thiết kế có 3 tham số tự do. Với chúng không có thể đặt nhiều điều kiện khống chế, vì có thể dẫn đến nhiều nghiệm không tồn tại - không có thể tìm lời giải cơ sở. Hơn nữa với đặt điều kiện cho cân bằng khối lượng đào đắp số tham số tự do giảm đi một và còn lại là hai. Với chừng ấy tham số ít ỏi (ẩn số) điều kiện khống chế, mặc dù có thể có ý nghĩa kinh tế - kỹ thuật, không có thể hiện hữu trong nhiều trường hợp. Tất cả những cái đó làm

không thuận lợi cho mặt phẳng thiết kế, còn hướng tới mặt tối ưu với giữa quan điểm kinh tế - kỹ thuật nhưng không dẫn đến kết quả mong muốn.

3.4.2. Thiết kế mặt

Trong sử dụng mặt thiết kế ở dạng mặt phẳng ta giới hạn bởi ít số tham số của phương trình mặt phẳng. Còn ở thiết kế mặt biểu diễn giải tích qua dạng đa thức

$$H = a_{00} + a_{01}X + a_{01}Y + a_{11}XY + \\ + a_{20}X^2 + a_{02}Y^2 + \ldots \qquad (3.4.19)$$

và không hy vọng là lời giải của bài toán. Vì vậy ở đây ta không xem xét vấn đề biểu diễn giải tích cho mặt phẳng thiết kế. Thay vào đó sẽ tìm mô hình số địa hình cho mặt thiết kế. Nói cách khác sẽ cố gắng để có độ cao thiết kế các điểm của một lưới ô vuông, tập hợp sẽ là mô hình địa hình của mặt thiết kế. Ẩn số sẽ nhận độ cao thiết kế H_{ij} của các điểm mạng lưới hình vuông. Trường hợp này chỉ tiêu tối ưu của thiết kế đặt điều kiện

$$\sum_{(i,j)\in T} |V_{ij}| = \min ,$$

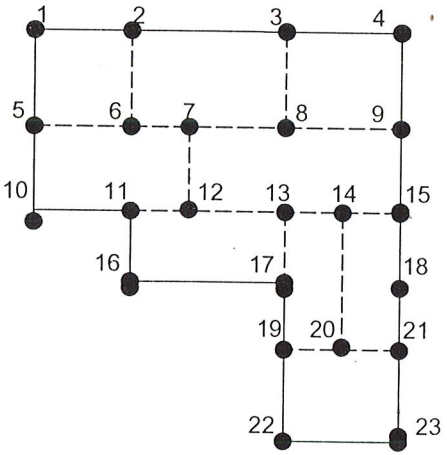
ở đó $V_{ij} = H_{ij} - H'_{ij}$ là độ cao gia công ở mạng lưới hình vuông.

Điều kiện giới hạn thực chất không khác như ở điểm 3.4.1. Ở đây giới hạn cho độ nghiêng coi như tại các điểm trên mạng lưới, nằm trên đường i, đường j nhưng với khoảng cách lớn hơn. Hơn nữa, cần đặt điều kiện giới hạn bẻ gãy giữa các độ nghiêng.

Giải bài toán hình thành này sẽ gặp nhiều khó khăn. Khó khăn lớn nhất trước tiên là số lượng ẩn số lớn. Mặt khác số ẩn lớn đòi hỏi số giới hạn lớn (giới hạn lớn hơn nhiều so với ẩn số). Như thế thường dẫn đến bài toán không giải được - lời giải cơ sở không tồn tại. Như vậy dẫn đến không thuận lợi, vì số ẩn số ít (tham số lời giải). Khó khăn này dẫn đến nguyên nhân sử dụng

các phương pháp tiệm cận, mà thường phải dẫn đến tăng thời gian tính toán. Hài hoà khi số lượng tham số tương đối nhỏ, không làm dồn nén quá nhiều điều kiện đòi hỏi của thiết kế. Nhìn qua ta có thể hướng tới mô hình một mạng lưới hình vuông. Thật vậy, những phương pháp này là tồn tại, ở đây ta sẽ xem xét một thuật toán cho thiết kế mà số lượng giảm nhiều, thích hợp mô hình của địa hình tương đối bằng phẳng, tức thiết kế của các loại như mặt tưới tiêu, sân bay, v.v..

Giả sử thiết kế mà ta cần thực hiện trên lãnh thổ có hình như ở hình 3.4.1.



Hình 3.4.1

Diện tích này được chia qua các đoạn đứt gãy thành những hình chữ nhật hình dạng khác nhau. Những đường này gọi là đường khống chế, còn các điểm giao nhau, ký hiệu trên hình 3.4.1 bằng hình tròn nhỏ. Những điểm này gọi là điểm khống chế.

Độ cao của chúng sẽ là tham số của lời giải. Trên quan điểm chất lượng bản thiết kế tương lai, các điểm khống chế nằm ở những chỗ đặc trưng địa hình. Mặt thiết kế có tính chất quan

trọng, là các đường thiết kế nối hai điểm khống chế kề nhau sẽ là đoạn thẳng. Khoảng cách giữa hai điểm khống chế không quá 150 - 200m.

Bây giờ mô hình số địa hình xác định bởi tập hợp điểm T, sẽ xác định một tập hợp con T_0 bao gồm tất cả điểm khống chế (độ cao nhận là tham số của lời giải). Cùng với T_0 sẽ thành lập một tập hợp điểm T_P, tạo điểm chi tiết theo đường khống chế. Ta có $T_0 \subset T_P \subset T$.

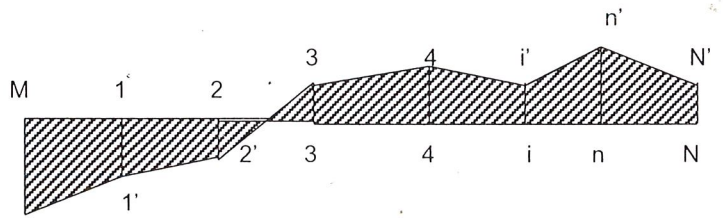
Chọn chỉ tiêu tối ưu phụ thuộc vào các ẩn và sẽ tính đến tối thiểu khối lượng đào đắp.

Nếu M' và N' là hai điểm khống chế, tương ứng với trên thiết kế M và N (hình 3.4.2), đường thiết kế MN theo như trên cần phải là đường thẳng. Các điểm 1', 2', ..., n' là các điểm mặt đất ở giữa, còn điểm thiết kế tương ứng 1, 2, ..., n. Độ cao mặt đất ký hiệu H'_M, H'_1, H'_2,..., H'_n, H'_N . Còn độ cao thiết kế cũng mặt cắt đó là H_M, H_1, H_2,..., H_n, H_N . Độ cao gia công của các điểm này

$$V_i = H_i - H'_i , \qquad (3.4.20)$$

với $i = M, 1, 2, ..., n, N.$

Chỉ tiêu tối ưu sẽ nhận tổng diện tích phần gạch chéo cho tất cả đường khống chế (ký hiệu trên hình 3.4.1) sẽ là cực tiểu (min). Với mục đích trước hết cần chỉ ra phải hiển thị phần diện tích gạch chéo của một đường khống chế (hình 3.4.2) ở hàm của tham số ẩn số - độ cao các điểm khống chế đầu mút.



Hình 3.4.2

Giả sử các điểm chi tiết của các đường khống chế nằm cách nhau cùng một khoảng là D, như thế vì các điểm đường khống chế là đường của mạng hình vuông thuộc mô hình số địa hình, còn mỗi điểm khống chế là nút lưới. Trong trường hợp này diện tích gạch chéo có thể biểu diễn dưới dạng

$$F_{MN} = (|V_M| + |V_N|)\frac{D}{2} + D\sum_{i=1}^{n}|V_i| \ , \qquad (3.4.21)$$

ở đây D là cạnh của lưới hình vuông.

Trong (3.4.21) diện tích F_{MN} chưa thể hiện là hàm của ẩn số - độ cao thiết kế của điểm khống chế M và N. Để đạt được mục đích, sẽ thể hiện độ cao các điểm 1, 2, ..., n qua độ cao thiết kế của M và N. Với điểm chi tiết i của đường khống chế MN sẽ có

$$\begin{aligned} H_i &= H_M + \frac{H_N - H_M}{S_{MN}} S_{Mi} = \\ &= H_M\left(1 - \frac{S_{Mi}}{S_{MN}}\right) + H_N \frac{S_{Mi}}{S_{MN}} = \\ &= H_M \frac{S_{MN} - S_{Mi}}{S_{MN}} + H_N \frac{S_{Mi}}{S_{MN}} = \\ &= H_M \frac{S_{Ni}}{S_{MN}} + H_N \frac{S_{Mi}}{S_{MN}}, \end{aligned} \qquad (3.4.22)$$

ở đây sử dụng

$$S_{Ni} = S_{MN} - S_{Mi} \ . \qquad (3.4.23)$$

Nếu đặt

$$\begin{aligned} S_{Mi} &= iD \ , \\ S_{Ni} &= (n\text{-}i\text{+}1)D \ , \\ S_{MN} &= (n\text{+}1)D \ , \end{aligned} \qquad (3.4.24)$$

thì công thức (3.4.22) sẽ thay đổi vào dạng

$$H_i = \left[H_M \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - H_N \frac{i}{n+1} \right] D. \qquad (3.4.25)$$

Trong tường hợp này hàm mục tiêu (chỉ tiêu tối ưu) sẽ nhận dạng

$$Z = D \sum_{M,N \in T_0} \left(\frac{|V_M| + |V_N|}{2} + \sum_{M}^{N} |V_i| \right), \qquad (3.4.26)$$

ở đây

$$V_i^{(MN)} = H_i^{(MN)} - H_i'^{(MN)} =$$

$$= \left[H_M \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + H_N \frac{i}{n+1} \right]^{(MN)} - H_i^{(MN)}. \qquad (3.4.27)$$

Để hàm (3.4.26) có thể hiển thị ở dạng (3.4.15) cần tham gia độ cao ẩn số thiết kế H_M , H_N của các điểm khống chế (M, N $\in T_0$) và độ cao thiết kế H_i (i $\in T_P$) cho tất cả điểm chi tiết thuộc đường khống chế. Trong trường hợp này hàm mục tiêu (3.4.26) có thể biểu diễn dưới dạng

$$Z = D \sum_{Q \in T_0} t_Q \left| H_Q - H'_Q \right| - D \sum_{i \in T_P} \left| H_i - H'_i \right| \qquad (3.4.28)$$

Ở đây $t_Q = \frac{k}{2}$ với k là số đường khống chế xuất phát từ điểm Q.

Với (3.4.27) điều kiện tuyến tính của các điểm độ cao, nối hai điểm khống chế kề nhau sẽ xuất hiện ở dạng

$$H_{i_{MN}} - \left[H_M \left(1 - \frac{i_{MN}}{n_{MN}+1} \right) + H_N \frac{i_{MN}}{n_{MN}+1} \right] D = 0 . \qquad (3.4.29)$$

$$(i_{MN} = 1, 2, \ldots, n_{MN};\ M, N \in T_0).$$

Để tránh đa trị lời giải, từ trị tuyệt đối cần chuyển qua trị thực.

Nhằm mục đích này đưa vào biến mới Y_K ($K = Q, i; K \in T_P$), sao cho

$$Y_K \geq 0,\ |H_K - H'_K| \leq Y_K;$$
$$Y_K - H_K + H'_K \geq 0\ ,\ Y_K + H_K - H'_K \geq 0\ . \qquad (3.4.29a)$$

Như thế dẫn đến bài toán tương tự như ở 3.4.1 - công thức (3.4.17, 18). Còn lại là với (3.4.29) và (3.4.29a) thêm vào một vài điều kiện giới hạn, nảy sinh từ thực chất thiết kế của bài toán. Những điều kiện giới hạn (ràng buộc) về:

1) Độ nghiêng cực tiểu và cực đại của các đường khống chế.

$$H_N - H_M \leq JMAX.S_{MN}\ ,$$
$$H_N - H_M \geq JMIN.S_{MN}\ ; \qquad (3.4.30)$$

2) Thay đổi độ dốc (độ nghiêng) của đường khống chế Z-M-N.

$$\frac{H_M - H_Z}{S_{ZM}} - \frac{H_N - H_M}{S_{MN}} \leq \delta_{MAX}\ ,$$
$$\frac{H_Z - H_M}{S_{ZM}} - \frac{H_M - H_N}{S_{MN}} \leq \delta_{MIN}\ ; \qquad (3.4.31)$$

3) Đào xẻ đi (C_P) hay đắp vào cực đại (N_S).

$$H_l - H'_l \geq C_P\ ,$$
$$H'_l - H_l \geq N_S\ , \qquad (3.4.32)$$
$$l \in T_0\ .$$

4) Độ cao cực đại (hay cực tiểu) của một vài điểm khống chế (thông thường nhất hay nằm trên ranh giới)

$$H_q \geq K_{MIN},$$
$$H_q \leq K_{MAX}, \qquad (3.4.33)$$
$$q \in T$$

điều kiện 1) và 2) giới hạn độ nghiêng thiết kế, cần phải hài hoà với dấu độ nghiêng thiết kế cuối cùng, tức dấu độ nghiêng thiết kế xác định trước. Nhưng việc này không khó, vì độ nghiêng thiết kế trong khuôn khổ vùng xác định (đường nét liền trong hình 3.4.1) thường biết được (cho trước).

Sau khi bài toán được giải, tức xác đinh độ cao toàn bộ điểm khống chế, theo công thức (3.4.25) tính độ cao thiết kế đến chi tiết đường khống chế.

Sau đến xác định độ cao thiết kế đến khi hết phía trong mạng lưới. Việc này thực hiện theo mỗi một hình chữ nhật bao quanh bởi đường khống chế. Tiếp giải bài toán Diricle, tức là tìm trị của hàm H = H(x,y) trong vùng đóng G, giới hạn (điều kiện biên) H(x,y) đã biết; thỏa mãn phương trình vi phân laplace:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} = 0. \qquad (3.4.34)$$

Bài toán giải theo cách tương ứng trình bày ở 3.3.2 để xác định độ cao chi tiết của mô hình số địa hình mặt đất.

Còn lại cuối cùng tính khối lượng đất đá, thực hiện theo công thức:

$$Q_{(đào)} = \Sigma P_{ij} V_{ij}, \qquad (3.4.35a)$$
$$((i,j) \in T;\ V_{ij} < 0);$$
$$Q_{(đắp)} = \Sigma P_{ij} V_{ij} \qquad (3.4.35b)$$
$$((i,j) \in T;\ V_{ij} > 0)$$

ở đây P_{ij} xác định đại diện (trọng số) cho điểm đó.

Với điểm biên (i,j)

$$P_{ij} = \frac{1}{2} D^2 ; \qquad (3.4.36a)$$

Với điểm góc

$$P_{ij} = \frac{1}{4} D^2; \text{ tương ứng } P_{ij} = \frac{3}{4} D^2$$

với tất cả điểm còn lại

$$P_{ij} = D^2 . \qquad (3.4.36b)$$

Người thiết kế nếu không hài lòng với lời giải cuối cùng, bài toán có thể giải mới lại sau khi đặt thêm một số điều kiện bổ sung dạng (3.4.33) cho một vài điểm khống chế. Sau khi có lời giải cuối cùng tiến đến phân chia đào đắp. Mục đính này thường giải bài toán vận chuyển (bài toán trường hợp riêng của quy hoạch tuyến tính).

Chương 4

TỰ ĐỘNG HOÁ QUÁ TRÌNH THÀNH LẬP BÌNH ĐỒ VÀ BẢN ĐỒ

4.1. VỀ TỰ ĐỘNG HÓA THÀNH LẬP BÌNH ĐỒ VÀ BẢN ĐỒ

Với tự động hoá quá trình thành lập bản gốc đo vẽ địa hình bắt đầu khi kỹ thuật tính toán, điện tử tin học đi vào cuộc sống. Thật vậy, khi những thành tựu kỹ thuật ảnh số đã đưa thế giới thực về bình đồ, bản đồ thật sự. Mặt khác tự động hoá chuyển thông tin số về đồ hoạ thành hiện thực và hiệu quả khi càng phát triển kỹ nghệ kỹ thuật số.

Thông tin đo đạc số, theo nguyên tắc có tính rời rạc, thông thường nhất tập hợp nhằm mục đích thành lập bản đồ, mà thực chất là một biểu diễn đồ họa với yêu cầu cao về độ chính xác. Với thành lập bản đồ gốc địa hình tốn rất nhiều thời gian công sức của các nhà chuyên môn khác nhau. Thành lập bản gốc địa hình tỷ lệ lớn, để có thể tự động hoá hoàn toàn. Ở đây, vấn đề dẫn đến chuẩn bị thông tin để thể hiện địa vật chi tiết và bình độ, xử lý và được đưa sang thiết bị cứng sao chép (hard copy) in ấn bản vẽ.

Thực chất màn hình, máy vẽ, máy in (đầu ra) là một hệ thống thiết bị điện tử - tin học cho phép số liệu số biến đổi

thành dạng đồ họa. Thông thường hệ thống này cũng kèm luôn hệ thống biến đổi thông tin đồ họa vào dạng số,v.v..

Ở trong phần này, chủ yếu ta xem xét cơ sở toán học đảm bảo chương trình với mục đích tự động hoá.

4.2. THUẬT TOÁN TỰ ĐỘNG HÓA THÀNH LẬP BÌNH ĐỒ VÀ BẢN ĐỒ

4.2.1. Thuật toán nội suy đường cong được cho bởi các điểm rời rạc

Giả sử rằng đường cong phẳng dạng y = f(x) cho rời rạc - qua dãy điểm $B_K(x_K,y_K)$, K = 1, 2, ..., N. Vấn đề bằng cách nào thực hiện nội suy để nhận được điểm b_j (x_j, y_j) j = 1, 2, ..., n (n > N) sao cho hai điểm kề nhau của tập hợp $\{b_j\}$ khoảng cách đáng kể nhỏ so với hai điểm kề nhau của tập hợp $\{B_K\}$.

Với đường cong y = f(x) ngoài dãy điểm B_K , ta cho rằng hàm trơn, tức tại mỗi điểm thuộc vùng xét hàm y = f(x) tồn tại đạo hàm.

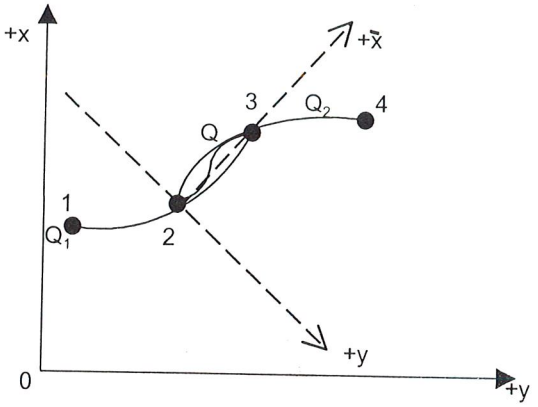
Trong tài liệu có nhiều cách khác nhau để tăng dày điểm B_K. Ví dụ thường sử dụng xấp xỉ đường y = f(x) trong vùng nhỏ S_i quanh điểm i, bao gồm các điểm $B^{(i)}{}_\xi \in \{B_K\}$ $(\xi = \overline{1,S})$. Với vùng này đưa ra đa thức xấp xỉ $\bar{x} = f_1(\rho)$ và $\bar{y} = f_2(\rho)$, ở đây ρ là hàm chọn thích hợp của x và y ví dụ có khả dĩ

$$\rho = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \qquad (4.2.1)$$

Ở đây (x_i,y_i) là tọa độ điểm trung tâm của vùng S_i , còn (x,y) là tọa độ điểm thuộc vùng S_i.

Qua đưa ra đa thức nội suy $\bar{x} = f_1(\rho)$, $\bar{y} = f_2(\rho)$ các điểm B_K được tăng dày. Việc đó lặp lại ở dãy điểm các vùng con của miền

xác định, cuối cùng nhận được các điểm của đường y = f(x) đủ dày dùng để sử dụng.



Hình 4.2.1

Tồn tại cũng phương pháp khác, như sau. Giả sử (hình 4.2.1) các điểm 1,2,3,4 là các điểm tuần tự trong B_K. Qua các điểm 1,2,3 vẽ đường tròn Q_1, còn qua 2,3,4 vẽ đường tròn Q_2. Phương trình hai đường tròn là

$$Q_1: (x'- a_1)^2 + (y'- b_1)^2 - r^2_1 = 0,$$
$$Q_2: (x''- a_2)^2 + (y''- b_2)^2 - r^2_2 = 0, \qquad (4.2.2)$$

Ở đây (a_1, b_1), tương tự (a_2, b_2) là tọa độ tâm của hai đường tròn trong hệ (0;x,y) còn r_1, r_2 là bán kính.

Thực hiện chuyển và quay hệ tọa độ sao cho gốc mới đến điểm 2, còn trục theo X hướng đến 3. Rõ ràng góc quay tương ứng với góc phương vị α_{23} trong hệ đó, tức là

$$\alpha_{23} = \text{arctg}\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}. \qquad (4.2.3)$$

Tọa độ điểm bất kỳ trong hệ mới $(2; \bar{x}, \bar{y})$ tính theo công thức

$$\bar{x} = \cos\alpha_{23}(x - x_2) + \sin\alpha_{23}(y - y_2),$$
$$\bar{y} = -\sin\alpha_{23}(x - x_2) + \cos\alpha_{23}(y - y_2). \qquad (4.2.4)$$

Phương trình đường tròn Q_1 và Q_2 trong hệ tọa độ mới $(2; \bar{x}, \bar{y})$ sẽ là

$$Q_1 : (\bar{x}'-\bar{a}_1)^2 + (\bar{y}'-\bar{b}_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$Q_2 : (\bar{x}''-\bar{a}_2)^2 + (\bar{y}''-\bar{b}_2) - r_2^2 = 0, \qquad (4.2.5)$$

ở đây

$$\bar{a}_i = \cos\alpha_{23}(a_i - x_2) + \sin\alpha_{23}(b_i - y_2),$$
$$\bar{b}_i = -\sin\alpha_{23}(a_i - x_2) + \cos\alpha_{23}(b_i - y_2). \qquad (4.2.6)$$

Khi giải (4.2.5) theo y, nhận được

$$Q_1 : \bar{y}' = \bar{b}_1 \pm \sqrt{r_1^2 - (\bar{x}'-\bar{a}_1)^2},$$
$$Q_2 : \bar{y}'' = \bar{b}_2 \pm \sqrt{r_2^2 - (\bar{x}''-\bar{a}_2)^2}, \qquad (4.2.7)$$

với $\bar{x} = 0$ và theo công thức (4.2.7) cần nhận $\bar{y}' = \bar{y}'' = 0$, tương tự với $\bar{x} = S_{23}$ sẽ nhận $\bar{y}' = \bar{y}'' = 0$.

Chú ý rằng theo công thức (4.2.7) với hai đường cong có thể tính theo hai cặp tọa độ y cho mỗi x.

Cặp thứ nhất dành cho đường cong Q_1, còn cặp thứ hai cho Q_2. Từ hai cặp tọa độ sử dụng những tọa độ mà theo trị tuyệt đối nhỏ hơn. Chính đó sẽ là tọa độ của các điểm trên các đường cong Q_1 và Q_2 nằm trên cung 2-3. Bây giờ chọn một khoảng cách nhỏ $\Delta\bar{x}$ và tính tọa độ

$$y' = \bar{b}_1 \pm \sqrt{r_1^2 - (j.\Delta\bar{x} - a_1)^2},$$
$$y'' = \bar{b}_2 \pm \sqrt{r_2 - (j.\Delta\bar{x} - a_2)^2}, \qquad (4.2.8)$$
$$j = \overline{1, m}$$

sao cho

$$m\,\Delta\bar{x} \le \bar{x}_3 \le (m+1)\,\Delta\bar{x}.$$

Ở kết quả đường cong Q_1 nhận điểm $j=\overline{1,m}$ với tọa độ $(\bar{y}'_j, j\Delta\bar{x})$, còn đường cong Q_2 là $(\bar{y}''_j, j\Delta\bar{x})$.

Từ tọa độ $\bar{y}'$ và $\bar{y}''$ nhận được của các điểm trên hai đường cong sẽ tính tọa độ của các điểm của đường cong nội suy chính là

$$\bar{y}_j = \frac{\bar{y}'_j P'_i + \bar{y}''_j P''_i}{P'_j + P''_j}, \tag{4.2.9}$$

với

$$P'_j = \frac{1}{S^q_{2j}}, P''_j = \frac{1}{S^q_{3j}}, \tag{4.2.9a}$$

Ở đây q có thể nhận giá trị $\frac{1}{2}$, 1, 2. Với phương pháp này tính đường cong nội suy Q nhìn gần đúng như chỉ ra ở hình 4.2.1.

Để vẽ đường cong cần tọa độ của các điểm b_j trong hệ $(2; \bar{x}, \bar{y})$ cần chuyển ngược lại về hệ (0; x,y). Nhằm mục đích này sử dụng quan hệ

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}_2 + \bar{x}\cos\alpha_{23} - \bar{y}\sin\alpha_{23}, \\ y &= \bar{y}_2 + \bar{x}\sin\alpha_{23} + \bar{y}\cos\alpha_{23}, \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

như là ngược lại của (4.2.4).

4.2.2. Vẽ tự động đường bình độ

Vấn đề xây dựng một hệ thống để tự động hoàn toàn vẽ các đối tượng địa vật, một loạt vấn đề về lôgic và khó khăn trong việc tổ chức mảng thông tin đầu vào cần được tính hết và giải quyết. Mức độ của những vấn đề này phụ thuộc vào tỷ lệ, khối lượng, mục tiêu bản đồ thể hiện. Ở đây ta không đi chi tiết vấn

đề này, mà quan tâm đến thuật toán tự động vẽ đường bình độ. Về quan điểm lôgic việc vẽ tự động đường bình độ rất đơn giản.

Để vẽ các đường bình độ, đầu tiên cần có thông tin về địa hình, còn muốn quá trình tự động thì thông tin ở dạng số. Ta xét hai trường hợp:

1) Mặt đất cho bởi độ cao và tọa độ phẳng các điểm chi tiết.

2) Mặt đất cho bởi mô hình số - mạng lưới hình vuông và độ cao các điểm nút của lưới.

Ở trường hợp thứ nhất thực chất chúng ta đi từ kết quả đo đạc trực tiếp, chuyển về hệ toạ độ thống nhất, còn trường hợp thứ hai - với mô hình địa hình mặt đất.

Vẽ tự động đường bình độ đòi hỏi - cũng như thực hiện bằng tay - nội suy độ cao theo độ dài đoạn nối hai điểm kề nhau đã biết độ cao, sao cho nhận được hệ thống điểm trên mặt đất cùng một độ cao. Khi mặt đất cho bởi các điểm phân bố, giai đoạn thứ nhất cần xác định đủ số các đoạn không cắt nhau, được nối các điểm kề nhau. Việc này bình thường nhận được khi từ hệ thống điểm trên mặt đất xây dựng các tam giác không cắt nhau. Giai đoạn tiếp là nội suy theo các cạnh của các tam giác không cắt nhau. Các cạnh của tam giác là những đoạn thẳng nối các điểm cạnh nhau trên mặt đất.

Cuối cùng cần tạo tuần tự các điểm cùng độ cao, và vạch ra đường bình độ và theo cách trình bày ở 4.2.1, những điểm này tăng dày đến mức độ cần thiết phù hợp với máy vẽ.

Vấn đề vẽ tự động đường bình độ có ý nghĩa của mình và khi vẽ hàm dạng $Z = f(x,y)$, ở đây (x,y) là tọa độ phẳng. Trong trường hợp này có thể lưu ý trong việc thực hiện bản đồ trọng lực, từ trường và các loại bản đồ khi hàm $Z = f(x,y)$ được cho rời rạc.

4.2.2.1. Thuật toán xây dựng lưới các tam giác không cắt nhau

Bài toán hình thành theo cách sau:

Giả sử cho tập hợp điểm $\{A_n(x_n,y_n)\}$ $(n = \overline{1,N})$, phân bố theo cách tuỳ ý trong hay ở các đỉnh của đa giác lồi G. Phía trong đa giác lồi G xây dựng các tam giác không cắt nhau cạnh sẽ là điểm của tập hợp $\{A_n\}$ sao cho toàn vùng G phủ kín.

Trước khi xem xét thuật toán, nhớ lại rằng hai lần diện tích của tam giác ijk (hình 4.2.2) xác định theo công thức

$$2F = x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j) =$$
$$= \begin{vmatrix} (x_j - x_i) & (y_j - y_i) \\ (x_i - x_k) & (y_i - y_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta x_{ij} & \Delta y_{ij} \\ \Delta x_{ki} & \Delta y_{ki} \end{vmatrix} \qquad (4.2.11)$$

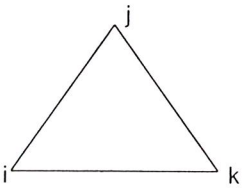
Ta nhận rằng định thức bên phải (4.2.11) cho ký hiệu det(i,j,k).

Có thể chứng minh rằng

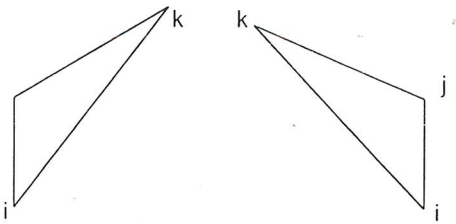
$$\det(i,j,k) = \det(j,k,i) = \det(k,i,j) =$$
$$= -\det(i,k,j) = -\det(k,j,i) = -\det(j,i,k). \qquad (4.2.12)$$

Từ công thức (4.2.12) thấy rằng dấu diện tích F phụ thuộc vào thứ tự sắp xếp của i, j, k. Với sắp xếp theo chiều kim đồng hồ $F > 0$, còn sắp xếp i,j,k theo hướng chiều ngược kim đồng hồ $F < 0$. Với hình ở hình 4.2.3 sẽ có: a/det(i, j, k) > 0; b/det(i,j,k)<0.

Ngược lại, nếu biết dấu của det(i,j,k), lập tức có thể xác định điểm K thuộc phía nào (nửa mặt phẳng nào) của tia ij. Chính tính chất định thức này (4.2.11) sẽ sử dụng.



Hình 4.2.2



Hình 4.2.3

Bây giờ có thể xét với thuật toán, một vấn đề mấu chốt của tiết này. Nó gồm một bước chuẩn bị và số bước hữu hạn tuần tự giống nhau.

Ở bước chuẩn bị, từ tập hợp $\{A_n\}$ chọn một điểm A_{n0}, biết điểm này nằm trong đa giác lồi G. Bây giờ cần chọn hai điểm (A_{n1} và A_{n2}) thuộc tập hợp $\{A_n\}$, sao cho ba điểm (A_{n0}, A_{n1}, A_{n2}) [1] tạo thành tam giác với chu vi nhỏ nhất và diện tích khác không. Nhằm mục đích này, với điểm A_{n1} chọn một điểm từ tập hợp $\{A_n\}$, điểm đó nằm gần nhất với A_{n0}. Xác định A_{n2} thực hiện với điều kiện

$$\rho_{n0n2} + \rho_{n1n2} = \min(\rho_{n0j} + \rho_{n1j}) \text{ theo chỉ số } j, \qquad (4.2.13)$$

ở đây

$$\rho_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

với $i = n_0, n_1$; $A_j \in \{A_n\}$, $j \neq i$.

Với như thế bước chuẩn bị kết thúc.

Trước khi đến mô tả bước thực hiện, để cho rõ đưa ra một vài định nghĩa

Định nghĩa 1: Cạnh đóng của tam giác (A_{n0} A_{n1} A_{n2}) là cạnh, trên đó đã xây dựng tam giác khác (A_{j0} A_{j1} A_{j2}), thoả mãn điều kiện

1) diện tích không bằng không;

2) không một cạnh nào cắt với các cạnh hai tam giác nào đó đã xây dựng;

3) từ tập hợp tam giác thoả mãn hai điều kiện trên, tam giác (A_{jo} A_{j1} A_{j2}) có chu vi nhỏ nhất

Định nghĩa 2: Cạnh biên tam giác (A_{n0} A_{n1} A_{n2}) gọi là cạnh mà với nó từ tập hợp điểm $\{A_n\}$ không có thể tìm được điểm để tạo thành tam giác, để đóng cạnh này.

Cạnh biên cũng là cạnh của đa giác lồi G.

Định nghĩa 3: Điểm A_n gọi là đóng, nếu trong quá trình xây dựng hệ thống tam giác không phủ nhau, tạo thành tập hợp các tam giác sao cho tất cả cạnh xuất phát từ A_n, là cạnh biên hay cạnh đóng.

Ý nghĩa của mỗi một bước thực hiện, ví dụ bước (j + 1) kết thúc đóng vào cạnh của một trong các tam giác $(A_{n0}\ A_{n1}\ A_{n2})^{(i)}$, $i = \overline{1,j}$, mà tam giác này sẽ được xây dựng với các bước trước j, và mở ra cho xét các điểm đóng tiếp theo.

Để đạt được tất cả những điều này cần thực hiện các động tác sau:

1) Từ các cạnh của các tam giác $(A_{n0}\ A_{n1}\ A_{n2})^{(i)}$, $i = \overline{1,j}$ đã xây dựng trong các bước trước, chọn cạnh đầu tiên mà không phải biên và không phải cạnh đóng. Giả sử đó là cạnh (A_{m1}, A_{m2}) thuộc tam giác (A_{m0}, A_{m1}, A_{m2}). Nếu trong danh sách các cạnh của mạng tam giác không tìm thấy cạnh chưa đóng, thì hệ thống tam giác không phủ nhau đã xây dựng xong.

2) Nếu trong danh sách của các cạnh tìm được cạnh chưa đóng và không phải cạnh biên, chọn hai cạnh chưa đóng, xuất phát từ điểm A_{m1} và A_{m2}. Giả sử đó là cạnh (A_{m1},A_{m2}) và (A_{m2},A_{m5}) và giả sử cạnh này thuộc tam giác $(A_{m1}\ A_{m3}\ A_{m4})$ và $(A_{m2}\ A_{m5}\ A_{m6})$. Mỗi tam giác này thuộc tập hợp các tam giác $\{(A_{n0}\ A_{n1}\ A_{n2})^{i}\}$ với $i = \overline{1,j}$.

3) Giả sử từ tập hợp điểm chưa đóng $\{\tilde{A}_n\}$ có điểm A_{mq} thoả mãn yêu cầu

$$\rho_{m1mq} + \rho_{m2mq} = \min_{k \in \{\tilde{A}_n\}} (\rho_{m1k} + \rho_{m2k}) \qquad (4.2.14)$$

với $\det(m_1, m_2, m_q) \neq 0$ (4.2.14a)

và không mâu thuẫn với một trong ba điều kiện sau:

$$\text{sign}[\det(m_1,m_2,m_0)] \neq \text{sign}[\det(m_1, m_2, m_q)], \quad (4.2.15)$$

$$\text{sign}[\det(m_1,m_3,m_4)] \neq \text{sign}[\det(m_1, m_3, m_q)], \quad (4.2.16)$$

$$\text{sign}[\det(m_2,m_5,m_6)] \neq \text{sign}[\det(m_2, m_5, m_q)], \quad (4.2.17)$$

Ở đấy trước khi kiểm tra điều kiện (4.2.16) kiểm tra điều kiện

$$\text{sign}[\det(m_1,m_2,m_4)] = \text{sign}[\det(m_1, m_2, m_0)], \quad (4.2.18)$$

và nếu ở đây thoả mãn, (4.2.16) không kiểm tra nữa (tại sao?).

Cũng như thế trước khi kiểm tra điều kiện (4.2.17) kiểm tra điều kiện

$$\text{sign}[\det(m_1,m_2,m_5)] = \text{sign}[\det(m_1, m_2, m_0)], \quad (4.2.19)$$

và nếu thỏa mãn, (4.2.17) không kiểm tra.

Nếu $\det(m_1, m_3, m_q) = 0$, điều kiện (4.2.16) coi đã thỏa mãn; nếu $\det(m_2, m_5, m_q) = 0$, coi đã thỏa mãn (4.2.17).

4) Nếu A_{mq} tìm được, thì cạnh $(A_{m1}\ A_{m2})$ của tam giác $(A_{m0}\ A_{m1}\ A_{m2})$ đánh dấu là cạnh đóng, còn từ đỉnh A_{m1}, A_{m2}, A_{mq} tạo thành tam giác mới $(A_{n0}\ A_{n1}\ A_{n2})$, tam giác này đã tính vào các tam giác đã thành lập. Với ký hiệu mới

$$A_{n0}^{(j+1)} \equiv A_{m1}, A_{n1}^{(j+1)} \equiv A_{m2}, A_{n2}^{(j+1)} \equiv A_{mq}.$$

5) Tập hợp các cạnh của mạng tam giác ghi dồn vào danh sách cạnh $(A_{m1}\ A_{mq})$ và $(A_{m2}\ A_{mq})$, còn cạnh $(A_{m1}\ A_{m2})$ đánh dấu là đóng.

6) Nếu với thực hiện điểm 3 điều kiện (4.2.16 ÷ 18) không thoả mãn, cạnh $(A_{m1}\ A_{m2})$ là cạnh của đa giác lồi G, tức cạnh $(A_{m1}\ A_{m2})$ là cạnh biên và được đánh dấu là cạnh biên.

7) Giữa các tam giác $\{(A_{n0}\ A_{n1}\ A_{n2})^{i}\}$, $i = \overline{1, j+1}$ tìm dù chỉ một tam giác, mà tam giác này có cạnh chưa đóng và không

phải cạnh biên xuất phát từ điểm A_{m1}. Nếu tam giác như thế không tìm được, điểm với số m_1 đánh dấu là đóng. Theo cách tương tự xác định điểm m_2 đã đóng hay là chưa.

Sau khi thực hiện 7 điều kiện trên, tức là bước (j + 1) thực hiện xong và tiếp đến bước (j + 2), bước này thực hiện theo quy tắc này (từ điểm 1÷7).

Khi thoát khỏi chu trình đã mô tả ta có thông tin cho tất cả tam giác không phủ nhau phủ kín toàn vùng G.

4.2.2.2. Thuật toán xây dựng đường F(x,y) = const

Thuật toán xây dựng đường

$$F(x,y) = \text{const} \tag{4.2.20}$$

Có thể sử dụng để vẽ tự động đường bình độ hay đường (4.2.20) cho mọi hàm vô hướng hai biến, mà hàm được cho rời rạc.

Với bài toán như thế có thể nói đến vẽ bản đồ trọng lực, từ trường, v.v.. Nói cách khác, thuật toán xét ở mục này là quan tâm của nhiều chuyên mục đa dạng trong khoa học trắc địa.

Giả sử kết quả thực hiện thuật toán trình bày ở điểm 4.2.2.1 đã nhận được tập hợp các tam giác $\{(A_{n0}\ A_{n1}\ A_{n2})^{(i)}\}$ $i = \overline{1,K}$, và phủ kín đa giác lồi G. Mục đích tiếp theo là xây dựng thuật toán xác định tọa độ của các điểm, trong đó hàm H = F(x,y) có trị H_l , $l = \overline{0,Z}$ và hình thành dãy điểm tuần tự $B_j^{(l)}(x_j^{(l)}, y_j^{(l)})$, j=0, S_l đảm bảo vẽ liên tục của đường $H = H_l$. Độ cao khoảng cách đều (khoảng cách đều)

$$\Delta H = H_{l+1} - H_l$$

là giá trị được cho trước.

Điều kiện đường $H \equiv H_l$ đi qua một số tam giác $\{(A_{n0}A_{n1}A_{n2})^{(i)}\}$, $i = \overline{0,K}$ dẫn đến thỏa mãn hai trong 3 điều kiện

$$\text{sign}\,[(H_{n0} - H_l)(H_{n1} - H_l)] = -1 \qquad (4.2.21a)$$

$$\text{sign}\,[(H_{n1} - H_l)(H_{n2} - H_l)] = -1 \qquad (4.2.21b)$$

$$\text{sign}\,[(H_{n2} - H_l)(H_{n0} - H_l)] = -1 \qquad (4.2.21c)$$

Ở điều kiện (4.2.21a) chỉ ra rằng đường $H = H_l$ qua cạnh $(A_{n0}A_{n1})$ (tại sao?). Giữ được (4.2.21b) làm đường $H = H_l$ đi qua cạnh $(A_{n1}A_{n2})$, còn (4.2.21c) đi qua $(A_{n0}A_{n2})$. Đặt điều kiện đường $H = H_l$ đi qua hai cạnh của tam giác $(A_{n0}A_{n1}A_{n2})^l$ (loại trường hợp qua đỉnh của tam giác, xét khi lập trình), thực chất nhận một mức độ trơn của mặt $H = F(x,y)$ cho bởi rời rạc các điểm $\{A_n\}$, $n = \overline{1,N}$.

Với mỗi $l = 0,Z$ sẽ xây dựng trước hết các tam giác $\{(A_{n0}^{(l)}\ A_{n1}^{(l)}\ A_{n2}^{(l)})^t\}$, $t = \overline{0,T}$, thỏa mãn 2 trong 3 phương trình (4.2.21). Sau đó tiến đến xem xét tất cả đường đẳng trị với giá trị $H = H_l$ $\left(l = \overline{0,L}\right)$, sao cho

$$H_{min} \le H_0 \le H_{min} + \Delta H\,,$$

$$H_{max} - \Delta H \le H_Z \le H_{max}\,. \qquad (4.2.22)$$

Từ tập hợp tam giác $\{(A_{n0}^{(l)}A_{n1}^{(l)}A_{n2}^{(l)})^t\}$, chọn tam giác đầu tiên ($t = 0$) và kiểm tra điều kiện (4.2.21) xác định hai cạnh nào đó của tam giác mà đường $H = H_l$ đi qua. Nhờ tọa độ và H của các đỉnh tương ứng, qua việc nội suy tuyến tính xác định hai điểm đầu tiên của tập hợp điểm $\{B_j^{(l)}\}$, $j = \overline{0,S_l}$, tức điểm $B_0^{(l)}$ và $B_1^{(l)}$.

Nội suy thực hiện theo công thức

$$X_j^l = X_{n1}^{\ l} + \frac{H_l - H_{n1}^l}{H_{n2}^l - H_{n1}^l}(x_{n2}^l - x_{n1}^l)\,,$$

$$Y_j^l = Y_{n1}{}^l - \frac{H_l - H_{n1}^l}{H_{n2}^l - H_{n1}^l} (y_{n2}^l - y_{n1}^l), \qquad (4.2.23)$$

Ở đây ta cho nhận việc thực hiện nội suy giữa hai điểm $A^{(l)}_{n1}$ à $A^{(l)}_{n2}$.

Cạnh chứa điểm B^l_0 sẽ gọi là cạnh vào ở tam giác $(A^{(l)}_{n0}A^{(l)}_{n1}A^{(l)}_{n2})^{(0)}$, còn cạnh chứa điểm B^l_1- cạnh ra của tam giác đó.

Các bước tiếp theo xây dựng đường $H = H_l$ là thực hiện ở tam giác mà tam giác mới này đóng cạnh ra tam giác cũ, và xác định điểm tiếp B^l_K của $H = H_l$ nằm trên cạnh ra của tam giác tuần tự.

Ta có kết quả của $(\tau - 1)^{(i)}$ bước tuần tự xác định được các điểm B^l_k, $k = \overline{0,\tau - 1}$ của đường $H = H_l$. Tiếp tập hợp $\{(A^{(l)}_{n0}A^{(l)}_{n1}A^{(l)}_{n2})^{(\tau-1)}\}$ là các tam giác đã dùng để xác định điểm B^l_k, $k = \overline{0,\tau - 1}$ và giả sử tên các điểm xác định cạnh ra cuối cùng đã biết. Giữa các tam giác còn lại $(A^{(l)}_{n1}A^{(l)}_{n1}A^{(l)}_{n2})^{(t)}$ sẽ tìm một tam giác đóng cạnh đóng cạnh ra cuối cùng. Khi tam giác này tìm được, xác định cạnh đóng như là cạnh vào, kiểm tra điều kiện (4.2.21) về việc tìm cạnh ra và theo tọa độ của các đỉnh xác định cạnh, xác định theo (4.2.23) tọa độ và cả điểm tiếp theo B^l_k. Tam giác này loại khỏi tập hợp $\{(A_{n0}{}^{(l)}A_{n1}{}^{(l)}A_{n2}{}^{(l)})\}$.

Nếu việc tìm tam giác đóng cạnh - ra cuối cùng của tam giác tương ứng không tìm được, quay ngược lại điểm đầu tiên B^l_0 và bắt đầu từ đấy lại thực hiện việc theo dõi đường $H = H_l$. Nếu cạnh nằm trên đó B^l_0, không phải cạnh biên, thì từ các tam giác còn lại (nếu có) trong tập hợp $\{(A_{n0}{}^{(l)}A_{n1}{}^{(l)}A_{n2}{}^{(l)})\}$ xây dựng trình tự mới từ điểm B^l_{k1}, $k_1 = 1, S1_l$. Chú ý rằng với theo dõi đường đẳng trị đóng kín cần kiểm tra có phải cạnh ra nhận

được không trùng với cạnh đầu, và khi sơ bộ không biết đường nào sẽ đóng kín, thì tiếp, điều kiện đó cần kiểm tra. Theo cách tương tự nhận được các điểm B^l_k cho tất cả $l = \overline{0,Z}$.

Trên cơ sở tạo thành tập hợp $\{B^l_j\}$ $\left(l = \overline{0,Z}; j = \overline{1,S_l}\right)$ và tọa độ của các điểm B^l_j theo cách mô tả ở điểm 4.2.1; các điểm B^l_j dùng tăng dày và kết quả mới nhận được file cho máy vẽ, máy in tự động.

4.2.3.3. Thuật toán vẽ đường bình độ với mô hình số địa hình đã được thành lập

Như đã thấy ở mục 3, tồn tại các phương pháp biến đổi thông tin địa hình - độ cao và tọa độ các điểm chi tiết, sao cho sản phẩm cuối cùng nhận được là mô hình số địa hình (mạng lưới hình vuông với biết độ cao tại các mắt lưới).

Ở đây ta sẽ trình bày cách vẽ đường bình độ với tồn tại mô hình số địa hình.

Giả sử rằng điểm nút của lưới hình vuông với cạnh là D có độ cao là H_{ij} (nằm trên giao điểm i đường và j đường). Từ mạng lưới hình vuông có thể tạo lập lưới tam giác không phủ nhau, khi mỗi một hình vuông kẻ một đường chéo (phù hợp hơn khi kẻ đường có độ dốc lớn hơn). Tiếp đến có thể áp dụng thuật toán về nội suy đường bình độ, xét ở điểm 4.2.3.2. Nhưng ở đây có khả năng áp dụng phương pháp khác nữa, xuất xứ từ biểu diễn giải tích của hàm H = F(x,y) ở mỗi hình vuông của mạng.

Nhằm mục đích này xét một hình vuông (hình 4.2.4) nằm trên các đường i, (i+1) và j, (j +1). Giả sử hàm H = F(x,y) với mỗi hình vuông có dạng song tuyến

$$H = a + bx + cy + dxy, \qquad (4.2.24)$$

Tức phụ thuộc vào 4 tham số a,b,c và d. Để xác định 4 tham số này sẽ sử dụng điều kiện mặt (4.2.24) qua nút của lưới, ký hiệu là 1,2,3,4 và nằm trên đường ngang i và (i + 1) và đường đứng j và (j + 1). Tọa độ (x,y) của các điểm nút có thể thể hiện qua

$$x_i = x_1 + (i\text{-}1)D,$$
$$y_i = y_1 + (j\text{-}1)D, \qquad (4.2.25)$$

Ở đấy x_1 , y_1 là tọa độ góc tây nam của toàn mạng (có hình chữ nhật cạnh DX và DY). Trong trường hợp đó phương trình (4.2.24) có thể thể hiện ở dạng

$$H_{ij} = a + b[x_1 + (i\text{-}1)D] + c[y_1 + (j\text{-}1)D] + \\ + d[x_1 + (i\text{-}1)D][y_1 + (j\text{-}1)D] . \qquad (4.2.26)$$

Để đơn giản đặt

$$x_1 = y_1 = 0,$$

công thức (4.2.26) thay đổi vào dạng

$$H_{ij} = a + b(i\text{-}1)D + c(j\text{-}1)D + d(i\text{-}1)(j\text{-}1)D^2 . \qquad (4.2.27)$$

Phương trình (4.2.27) có khi coi là của điểm 1 ở hình 4.2.4. Có thể viết và cho các điểm 2, 3, 4, đặt

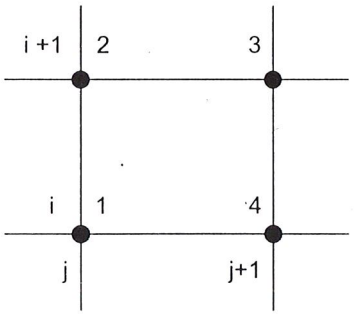
với điểm 2: i := i+1, j ≡ j;

với điểm 3: i := i+1, j := j+1;

với điểm 4: i ≡ i, j := j+1.

Vì thế xuất hiện 4 phương trình cho bốn ẩn số a,b,c,d:

$$a + b(i\text{-}1)D + c(j\text{-}1)D + d(i\text{-}1)(j\text{-}1)D^2 - H_{ij} = 0,$$
$$a + b\,i\,D + c(j\text{-}1)D + d\,i\,(j\text{-}1)D^2 - H_{(i+1)j} = 0,$$
$$a + b\,i\,D + c\,j\,D + d\,i\,j\,D^2 - H_{(i+1)(j+1)} = 0, \qquad (4.2.28)$$
$$a + b(i\text{-}1)D + c\,j\,D + d(i\text{-}1)\,j\,D^2 - H_{i(j+1)} = 0.$$



Hình 4.2.4

Với việc giải hệ (4.2.28) nhận được 4 ẩn số tham gia vào (4.2.24)

Xác định giá trị H_l $\left(l = \overline{0,Z}\right)$ của H, hợp thức

$$\begin{aligned} &H_{min} \le H_0 \le H_{min} + \Delta H , \\ &H_{max} - \Delta H \le H_Z \le H_{max} , \\ &H_{l+1} = H_l + \Delta H , \end{aligned} \qquad (4.2.29)$$

Ở đây ΔH là khoảng cao đều, mà muốn xây dựng đường $H = H_l$. Xây dựng đường cong $H = H_l$ trong hình vuông con hình 4.2.4 sẽ thực hiện theo cách sau.

Giải phương trình (4.2.24) theo y, ta có ($H = H_l$)

$$y = \frac{H_l - a - bx}{c + dx} . \qquad (4.2.30)$$

Bắt đầu là $x_1 = (i-1)D$ và cho số gia ε_x, nhận

$$x_k = x_{k-1} + \varepsilon_x , \qquad (4.2.31)$$

sao cho

$$x_k \ne -\frac{c}{d} , x_P = iD . \qquad (4.2.32)$$

Tạo hiệu số

$$x_P - x_1 = D = p\,\varepsilon_x\,, \tag{4.2.33}$$

trực tiếp nhận

$$\varepsilon_x = \frac{D}{p}, \tag{4.2.34}$$

Qua công thức (4.2.34) sau khi chọn một số p thích hợp, xác định ε_x và theo công thức (4.2.31) tính tuần tự $x_2, x_3, ..., x_{P-1}$.

Với giá trị nhận được x_k ($k = \overline{1,p}$), tính đến (4.2.32), tính giá trị $y(x_k)$, sao cho

$$y_1 \le y(x_k) \le y_1 + D \tag{4.2.35}$$

với $y_1 = (j - 1)D$.

Ở kết quả nhận được điểm tuần tự $\{B^1_k(x_k, y_k)\}$ ($k = \overline{1,q}$; $q \le p$) , chúng nằm trong hình vuông, nằm giữa đường nằm ngang i và (i+1) và đường đứng j và (j +1) và như thế xác định đường $H = H_1$ cho hình vuông đó.

Để vẽ đường $H = H_1$ còn lại tăng dày với các điểm $\{b^1_j\}$ như đã trình bày ở điểm 4.2.1, để được độ dày đặc của điểm.

PHỤ LỤC

Phụ lục I. PHƯƠNG PHÁP GRAM - SMITH VỀ TRỰC GIAO TUẦN TỰ HỆ THỐNG VÉC TƠ

Giả sử cho hệ m véc tơ độc lập tuyến tính ($m \le n$)

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m . \qquad (I.1)$$

Qua biến đổi hệ này ta nhận được m véc tơ khác

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m , \qquad (I.2)$$

sao cho $(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \delta_{ij}$ với $i \neq j : \delta_{ij} = 0; i = j : \delta_{ij} = 1$

cũng thuộc không gian mà của hệ (I.1).

Bài toán giải qua m bước tuần tự. Từ tất cả m véc tơ độc lập tuyến tính chọn lấy một. Ví dụ $\bar{a}_1$. Ta cho rằng hệ (I.1) là cơ sở của một không gian m - chiều, xây dựng một mặt - xiper (m-1) chiều trong không gian đó, trực giao với $\bar{a}_1$. Trên mặt xiper chiếu tất cả véc tơ còn lại. Giả sử hình chiếu là

$$\bar{a}_{2.1}, \bar{a}_{3.1}, ..., \bar{a}_{m.1} . \qquad (I.3)$$

Với như thế kết thúc bước đầu tiên quá trình tính toán. Bước thứ hai, hệ (I.3) xem như hệ xuất phát mới, và ở đây chọn một véc tơ, ví dụ $\bar{a}_{2.1}$, xây dựng mặt (m – 2) - chiều, trực giao với $\bar{a}_{2.1}$ và tất cả các véc tơ $\bar{a}_{3.1}, \bar{a}_{4.1}, ..., \bar{a}_{m.1}$ chiếu lên mặt này. Giả sử hình chiếu là

$$\bar{a}_{3.2}, \bar{a}_{4.2}, ..., \bar{a}_{m.2} . \qquad (I.4)$$

Quá trình này tiếp tục đến cuối cùng còn lại một véc tơ. Sau chuẩn hoá quá trình chấm dứt.

Véc tơ chuẩn hoá

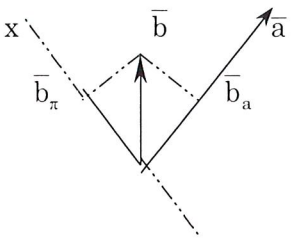
$$\bar{a}_{1.1} = \frac{1}{|\bar{a}_1|}\bar{a}_1, \bar{a}_{2.2} = \frac{1}{|\bar{a}_{2.1}|}\bar{a}_{2.1}, \ldots, \bar{a}_{m.m} = \frac{1}{|\bar{a}_{m.m-1}|}\bar{a}_{m.m-1} \qquad (I.5)$$

tạo thành hệ trực giao véc tơ, tức

$$\bar{a}_{r.r} = \bar{u}_r, \quad r = \overline{1,m} \qquad (I.6)$$

$$(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \delta_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,m}.$$

Để diễn tả giải tích lời giải, giả sử trước hết ta cho hai véc tơ không đồng tuyến $\bar{a}$ và $\bar{b}$ (hình I.1)



Hình I.1

Giả sử với $\bar{a}$ có một mặt π, trực giao với $\bar{a}$. Hình chiếu $\bar{b}$ trên π, ký hiệu với $\bar{b}_\pi$, sẽ là (hình I.1):

$$\bar{b}_\pi = \bar{b} - \bar{b}_a, \qquad (I.7)$$

ở đây $\bar{b}_a$ là hình chiếu của $\bar{b}$ trên $\bar{a}$.

Với hình chiếu này, khi sử dụng phương trình tích vô hướng

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}|.|\bar{b}|\cos(a^{\wedge}b), \qquad (I.8)$$

mà có thể đặt chung cho không gian m - chiều, sẽ có

$$\bar{b}_a = |\bar{b}|\cos\left(\overset{\wedge}{ab}\right)\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{\bar{b}}{|\bar{a}|}.\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|.|\bar{b}|}\bar{a} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|.|\bar{a}|}\bar{a} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{(\bar{a},\bar{a})}\bar{a}. \qquad (I.9)$$

Khi thay (I.9) vào (I.7) nhận được

$$\bar{b}_{\pi} = \bar{b} - \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{(\bar{a}, \bar{a})}\bar{a}\,. \tag{I.10}$$

Nếu véc tơ $\bar{a}$ chuẩn hoá, tức

$$(\bar{a}, \bar{a}) = 1, \tag{I.11}$$

công thức (I.1) đơn giản hơn là

$$\bar{b}_{\pi} = \bar{b} - (\bar{a}, \bar{b})\bar{a}\,. \tag{I.10a}$$

và đây giải thích tại sao tại mỗi bước trong quá trình Gram - Smith nên trước tiên thực hiện chuẩn hoá véc tơ.

Giả sử bây giờ có bốn véc tơ, xác định trong một không gian với $n \geq 4$ chiều:

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\,.$$

Với các bước tuần tự Gram - Smith thực hiện các biến đổi sau:

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{1.1} = \frac{1}{|\bar{a}_1|}\bar{a}_1,\\
&\bar{a}_{2.1} = \bar{a}_2 - (\bar{a}_{1.1}, \bar{a}_2)\bar{a}_{1.1},\\
&\bar{a}_{3.1} = \bar{a}_3 - (\bar{a}_{1.1}, \bar{a}_3)\bar{a}_{1.1},\\
&\bar{a}_{4.1} = \bar{a}_4 - (\bar{a}_{1.1}, \bar{a}_4)\bar{a}_{1.1},\\
&\text{----------}\\
&\bar{a}_{2.2} = \frac{1}{|\bar{a}_{2.1}|}\bar{a}_{2.1},\\
&\bar{a}_{3.2} = \bar{a}_{3.1} - (\bar{a}_{2.2}, \bar{a}_{3.1})\bar{a}_{2.2},\\
&\bar{a}_{4.2} = \bar{a}_{4.1} - (\bar{a}_{2.2}, \bar{a}_{4.1})\bar{a}_{2.2},\\
&\text{----------}
\end{aligned} \tag{I.12}$$

$$\bar{a}_{3.3} = \frac{1}{|\bar{a}_{3.2}|}\bar{a}_{3.2},$$

$$\bar{a}_{4.3} = \bar{a}_{4.2} - (\bar{a}_{3.3}, \bar{a}_{4.2})\bar{a}_{3.3},$$

$$\bar{a}_{4.4} = -\frac{1}{|\bar{a}_{4.3}|}\bar{a}_{4.3}$$

Các véc tơ

$$\bar{a}_{1.1}, \bar{a}_{2.2}, \bar{a}_{3.3}, \bar{a}_{4.4} \qquad \text{(I.13)}$$

tạo thành hệ véc tơ trực chuẩn, tức

$$(\bar{a}_{i.i}, \bar{a}_{j.j}) = \delta_{ij}. \qquad \text{(I.14)}$$

Như thấy ở công thức (I.12), quá trình trực giao tuần tự dẫn đến tính modul và tích vô hướng véc tơ, có cơ sở trực chuẩn, việc tính các modul và tích vô hướng thực hiện nhẹ nhàng hơn. Thật vậy giả sử $\bar{a}$ và $\bar{b}$ là hai véc tơ, được cho bởi tọa độ trong một không gian n - chiều với cơ sở trực chuẩn $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$, tức

$$\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + ... + a_n\bar{e}_n,$$

$$\bar{b} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + ... + b_n\bar{e}_n,$$

Ở đấy, a_i tương ứng b_i ($i = \overline{1,n}$) là tọa độ của véc tơ $\bar{a}$ và $\bar{b}$. Với cơ sở trực chuẩn, tức khi $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, đúng với công thức sau

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = [ab],$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{[aa]}, \qquad \text{(I.15)}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = \sqrt{[bb]}.$$

Trong công thức (I.15) sử dụng ký hiệu Gaus cho tổng mà được dùng rộng rãi trong trắc địa.

Với tất cả quá trình xem xét ta cho rằng các véc tơ xác định trong không gian với cơ sở chuẩn hoá.

Công thức (I.12) có thể tổng quan cho các trường hợp véc tơ xác định trong không gian n - chiều ($n \geq m$).

Ta có

$$\bar{a}_{r.r} = \frac{1}{|\bar{a}_{r.r-1}|}\bar{a}_{r.r-1} \qquad (I.12a)$$

$$\bar{a}_{i.r} = a_{i.r-1} - (\bar{a}_{r.r}, \bar{a}_{i.r-1})\bar{a}_{r.r},$$

$$r = 1, 2, ..., m; \; i = r + 1, r + 2, ..., m.$$

Giả sử véc tơ $\bar{a}_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ có biểu diễn

$$\bar{a}_i = a_{i1}\bar{e}_1 + a_{i2}\bar{e}_2 + ... + a_{in}\bar{e}_n,$$

Ở đấy $\bar{e}_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ tạo thành cơ sở chuẩn hoá của không gian n - chiều. Trong trường hợp này tọa độ của các véc tơ $\bar{a}_{r.r}$ và $\bar{a}_{i.r}$ (I.12a) tính theo công thức.

$$a_{rj.r} = a_{rj.r-1} \Big/ \sqrt{\sum_{h=1}^{n} a^2_{rh.r-1}}, \qquad (I.12b)$$

$$a_{ij.r} = a_{ij.r-1} - a_{rj.r}\sum_{h=1}^{n} a_{rh.r}a_{ih.r-1};$$

với $r = 1, 2, ..., m;$

$i = r+1, r+2, ..., m;$

$j = 1, 2, ..., n.$

Công thức (I.12) sẽ biến đổi khi đặt

$$\bar{a}_{1.1} = \bar{u}_1, \bar{a}_{2.2} = \bar{u}_2, \bar{a}_{3.3} = \bar{u}_3, \bar{a}_{4.4} = \bar{u}_4, \qquad (I.16)$$

và như thế $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ và $\bar{u}_4$ thể hiện chỉ qua $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ và $\bar{a}_4$.

Lưu ý đến (I.16) công thức (I.12) thay đổi vào dạng

$$\begin{aligned}\bar{a}_{2.1} &= \bar{a}_2 - (\bar{u}_1, \bar{a}_2)\bar{u}_1;\\ \bar{a}_{3.1} &= \bar{a}_3 - (\bar{u}_1, \bar{a}_3)\bar{u}_1;\\ \bar{a}_{4.1} &= \bar{a}_4 - (\bar{u}_1, \bar{a}_4)\bar{u}_1.\end{aligned} \tag{I.17a}$$

Khi thay (I.17a) vào (I.12), lưu ý đến (I.16) nhận được

$$\begin{aligned}\bar{a}_{3.2} &= \bar{a}_3 - (\bar{u}_1, \bar{a}_3)\bar{u}_1 - (\bar{u}_2, \bar{a}_3)\bar{u}_2;\\ \bar{a}_{4.2} &= \bar{a}_4 - (\bar{u}_1, \bar{a}_4)\bar{u}_1 - (\bar{u}_2, \bar{a}_4)\bar{u}_2.\end{aligned} \tag{I.17b}$$

Khi thay (I.17) vào (I.12) nhận được

$$\bar{a}_{4.3} = \bar{a}_4 - (\bar{u}_1, \bar{a}_4)\bar{u}_1 - (\bar{u}_2, \bar{a}_4)\bar{u}_2 - (\bar{u}_3, \bar{a}_4)\bar{u}_3. \tag{I.17c}$$

Tương ứng với (I.12) và (I.16) ta có

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= \frac{1}{|\bar{a}_1|}\bar{a}_1, \bar{u}_2 = \frac{1}{|\bar{a}_{2.1}|}a_{2.1},\\ u_3 &= \frac{1}{|\bar{a}_{3.2}|}\bar{a}_{3.2}, \bar{u}_4 = \frac{1}{|\bar{a}_{4.3}|}\bar{a}_{4.3}.\end{aligned} \tag{I.18}$$

Từ (I.17) và (I.18) sau khi biến đổi ta có

$$\begin{aligned}|\bar{a}_1| &= \sqrt{(\bar{a}_1, \bar{a}_1)} = (u_1, a_1),\\ |\bar{a}_{2.1}| &= \sqrt{(\bar{a}_2, \bar{a}_2) - (\bar{u}_1, \bar{a}_2)^2} =\\ &= (\bar{a}_{2.1}, \bar{u}_2) = (\bar{u}_2, \bar{a}_2),\\ |\bar{a}_{3.2}| &= \sqrt{(\bar{a}_3, \bar{a}_3) - (\bar{u}_1, \bar{a}_3)^2 - (\bar{u}_2, \bar{a}_3)^2} =\\ &= (\bar{u}_3, \bar{a}_{3.2}) = (u_3, \bar{a}_2),\\ |\bar{a}_{4.3}| &= \sqrt{(\bar{a}_4, \bar{a}_4) - (\bar{u}_1, \bar{a}_4)^2 - (\bar{u}_2, \bar{a}_4) - (\bar{u}_3, \bar{a}_4)^2} =\\ &= (\bar{u}_4, \bar{a}_{4.3}) = (\bar{u}_4, \bar{a}_4).\end{aligned} \tag{I.19}$$

Đưa vào ký hiệu

$$(\bar{u}_i, \bar{a}_j) = t_{ij} \quad (i \le j). \tag{I.20}$$

Trong trường hợp như thế, lưu ý đến (I.17), (I.18), (I.19) và (I.20) ta nhận được cuối cùng

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= \bar{a}_1 : t_{11},\\
\bar{u}_2 &= (\bar{a}_2 - t_{12}\bar{u}_1) : t_{22},\\
\bar{u}_3 &= (\bar{a}_3 - t_{13}\bar{u}_1 - t_{23}\bar{u}_2) : t_{33},\\
\bar{u}_4 &= (\bar{a}_4 - t_{14}\bar{u}_1 - t_{24}\bar{u}_2 - t_{34}\bar{u}_3) : t_{44}.
\end{aligned} \tag{I.21}$$

Khi giải (I.21) theo $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ nhận được

$$\begin{aligned}
\bar{a}_1 &= t_{11}\bar{u}_1,\\
\bar{a}_2 &= t_{12}\bar{u}_1 + t_{22}\bar{u}_2,\\
\bar{a}_3 &= t_{13}\bar{u}_1 + t_{23}\bar{u}_2 + t_{33}\bar{u}_3,\\
\bar{a}_4 &= t_{14}\bar{u}_1 + t_{24}\bar{u}_2 + t_{34}\bar{u}_3 + t_{44}\bar{u}_4.
\end{aligned} \tag{I.22}$$

Công thức (I.22) có thể biểu diễn và dạng ma trận

$$\underset{\sim}{A} = T * \underset{\sim}{U}, \tag{I.22a}$$

ở đây

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ & & t_{33} & t_{34} \\ & & & t_{44} \end{bmatrix}. \tag{I.23}$$

Để ý (I.19) và (I.20) với thành phần đường chéo của T ta có

$$t_{ij} = \sqrt{(\bar{a}_j, \bar{a}_j) - \sum_{i=1}^{j-1} t_{ij}^2}. \tag{I.24}$$

Nhấn mạnh rằng quá trình tính toán này sẽ dừng lại khi và chỉ khi hệ đã cho là suy biến. Trong trường hợp này một vài véc tơ đã xử lý nhận modul không, dẫn đến ngừng quá trình tính.

Có thể chứng minh rằng

$$\sqrt{(\bar{a}_{r.r-1}, \bar{a}_{r.r-1})} = t_{rr} \quad \left(r = \overline{1,m}\right),$$

$$(\bar{a}_{r.r}, \bar{a}_{k.r-1}) = t_{rk} \quad (k = \overline{r+1,m}). \qquad \text{(I.25)}$$

Trường hợp này công thức (I.12) có thể viết dưới dạng

$$\bar{a}_{r.r} = \frac{1}{t_{rr}} \bar{a}_{r.r-1},$$

$$\bar{a}_{k.r} = \bar{a}_{k.r-1} - t_{rk} a_r;$$

$$r = \overline{1,m}, \; k = \overline{r+1,m}. \qquad \text{(I.26)}$$

Bảng I.1

$A_0 \equiv A$	$A_{S.0}$	*Giải thích*
1	2	3
$+\frac{6}{5\sqrt{2}} + \frac{8}{5\sqrt{2}} + \frac{10}{5\sqrt{2}} \quad 0$	$+\frac{24}{5\sqrt{2}}$	$\bar{a}_{1.0} \equiv \bar{a}_1$
$+\frac{3}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{9}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5\sqrt{2}}$	$+\frac{8}{5\sqrt{2}}$	$\bar{a}_{2.0} \equiv \bar{a}_2$
$-\frac{8}{5\sqrt{2}} + \frac{11}{5\sqrt{2}} - \frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{7}{5\sqrt{2}}$	$-\frac{8}{5\sqrt{2}}$	$\bar{a}_{3.0} \equiv \bar{a}_3$
$A_{.1}$	$A_{S.1}$	
$+\frac{3}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{5}{5\sqrt{2}} \quad 0$	$+\frac{12}{5\sqrt{2}}$	$\bar{a}_{1.1} = \frac{1}{\lvert\bar{a}_{1.0}\rvert}.\bar{a}_{1.0} = \bar{u}_1$
----------	----------	
$0 \quad -\frac{5}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$	$\bar{a}_{2.1} = \bar{a}_{2.0} - (\bar{a}_{1.1}, \bar{a}_{2.0})\bar{a}_{1.1}$
$-\frac{8}{5\sqrt{2}} + \frac{11}{5\sqrt{2}} - \frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{7}{5\sqrt{2}}$	$-\frac{8}{5\sqrt{2}}$	$\bar{a}_{3.1} = \bar{a}_{3.0} - (\bar{a}_{1.1}, \bar{a}_{3.0})\bar{a}_{1.1}$

$A_{.2}$	$A_{S.2}$	
$+\frac{3}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{5}{5\sqrt{2}}$ 0 $0 \quad -\frac{5}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5\sqrt{2}}$ --- $-\frac{8}{5\sqrt{2}} + \frac{6}{5\sqrt{2}} \quad -\frac{10}{5\sqrt{2}}$	$+\frac{12}{5\sqrt{2}}$ $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$ --- $-\frac{12}{5\sqrt{2}}$	$\bar{u}_1$ $\bar{a}_{2.2} = \frac{1}{\lvert\bar{a}_{2.1}\rvert}\bar{a}_{2.1} = \bar{u}_2$ $\bar{a}_{3.2} = \bar{a}_{3.1} - (\bar{a}_{2.2}, \bar{a}_{3.1})\bar{a}_{2.2}$
$A_{.3}$ 1	$A_{S.3}$ 2	3
$+\frac{3}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{5}{5\sqrt{2}}$ 0 $0 \quad -\frac{5}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5\sqrt{2}}$ $-\frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{3}{5\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{5}{5\sqrt{2}}$	$+\frac{12}{5\sqrt{2}}$ $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$ $-\frac{5}{5\sqrt{2}}$	$\bar{u}_1$ $\bar{u}_2$ $\bar{a}_{3.3} = \frac{1}{\lvert\bar{a}_{3.2}\rvert}\bar{a}_{3.2} = \bar{u}_3$

Ở bảng I.1 cho ví dụ bằng số về trực giao tuần tự của hệ 3 véc tơ, được cho với các tọa độ trong một cơ sở trực chuẩn nào đó.

Hàng ma trận $A \equiv A_{.0}$ tạo thành từ tọa độ của 3 véc tơ $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

Các hàng trong $A_{.1}$ và $A_{.2}$ nằm trên đường gạch gạch không tham gia vào xử lý tiếp, với các biến đổi tiếp chúng được viết lại.

Trong bảng I.1 thêm vào cả cột A_s, để chứa tổng kiểm tra và tính như các cột khác trong bảng.

Nếu quan sát tính toán ở bảng I.1 và ma trận A ghi ở bộ nhớ máy tính, sẽ thấy trực giao tuần tự dẫn đến biến đổi tuần tự của các thành phần bảng xuất phát, khi thực hiện các bước tính toán.

Phụ lục II. PHÂN CHIA TRỰC GIAO MA TRẬN

Mỗi ma trận A không suy biến dạng $m \times n$ ($m \leq n$) có thể phân chia tích của một ma trận tam giác dưới và một ma trận U ở dạng của A với trực giao nhau giữa các hàng của U:

$$A = T^* \quad U \quad , \tag{II.1}$$

$$(m,n)\ (m,m)\ (m,n)$$

ở đấy $U^* U \neq E$ với $m < n$,

$$. U U^* = E ,$$

T là ma trận tam giác trên.

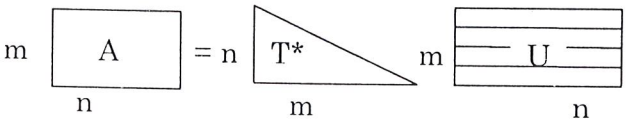
Nó là thế như thấy ở phương trình (I.22a). Thật vậy nếu biểu diễn hàng của A thành véc tơ riêng (tọa độ của véc tơ) trong một không gian n - chiều với cơ sở trực chuẩn và thực hiện trên hệ thống véc tơ $\underset{\sim}{A}$ để được hệ véc tơ chuẩn hoá $\underset{\sim}{U}$, mà các véc tơ biểu diễn tọa độ qua hàng của ma trận U, thì ta thấy (II.1) là có lý.

Phân chia (II.1) tồn tại khi và chỉ khi ma trận xuất phát A không suy biến, phân chia (II.1) là duy nhất.

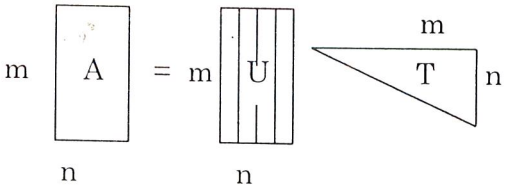
Nếu hoán vị (II.1) trực tiếp nhận được

$$\underset{(n,m)}{A^*} = \underset{(n,m)}{U^*} \quad \underset{(m,m)}{T} \quad . \tag{II.2}$$

Khi (II.1) tương ứng với phân chia của một ma trận ngang, thì (II.2) tương ứng phân chia của một ma trận dọc. Sơ đồ phân chia (II.1) và (II.2) biểu diễn dưới dạng



(m<n) , (II.1a)



(m>n) , (II.2a)

Ma trận đánh dấu gạch gạch trực giao giữa các dòng với (II.1a) và giữa các cột với (II.2a).

Với mỗi ma trận vuông không suy biến có khả năng phân chia (II.1) và (II.2). Với ma trận không suy biến vuông đối xứng khả năng phân chia trực giao là duy nhất.

Công thức để tính các thành phần ma trận trong phân chia trực giao đi dần từ ứng dụng phụ lục I, đặc biệt từ (I.20), (I.22a) và (I.24). Ta nhận rằng trong công thức (I.23) áp dụng cho m véc tơ trong không gian n- chiều ($m \le n$), tọa độ của véc tơ $\bar{a}_i$, tương tự $\bar{u}_i (i = \overline{1,m})$ là

$$\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) , \qquad (II.3)$$

$$\bar{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}) ,$$

thì công thức (I.22a) dẫn đến công thức tương tự

$$A = T^* \quad U , \qquad (II.4)$$

$$(m,n) \quad (m,m) \quad (m,n)$$

ở đây

$$A_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$U_{(m,n)} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \text{(II.5)}$$

$$T_{(m,m)} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1m} \\ & t_{22} & \dots & t_{2m} \\ & & & \dots\dots \\ & & & t_{mm} \end{pmatrix}$$

Công thức (II.4) có thể viết lại dưới dạng

$$-E.A + T^*U = 0$$

hay

$$[-ET^*] \times \begin{bmatrix} A \\ U \end{bmatrix} = 0. \qquad \text{(II.6)}$$

Mặt khác phương trình (II.4) có thể biểu diễn ở dưới dạng khác nữa, khi chú ý trực giao của U, tức

$$UU^* = E. \qquad \text{(II.7)}$$

Thật vậy, khi nhân (II.4) bên phải với U* và tính đến (II.7) sẽ có

$$AU^* = T^* \qquad \text{(II.8)}$$

Hoán vị của (II.8) dẫn đến

$$UA^* = T\,, \tag{II.9}$$

và có thể viết dưới dạng

$$-TE + UA^* = 0$$

hay

$$[TU]\,x\begin{bmatrix} E \\ A^* \end{bmatrix} = 0 \tag{II.10}$$

Ta nhận bảng sắp xếp sau

	n	m
m	A	-E
m	U	T

(II.11)

Công thức (II.6) nói lên tích của cột nào đó của bảng $\begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline U \\ \hline \end{array}$ với cột nào đó của bảng $\begin{array}{|c|}\hline -E \\ \hline T \\ \hline \end{array}$ cần cho kết quả không. Mặt khác, công thức (II.10) nói lên tích của hàng nào đó của bảng $\begin{array}{|c|c|}\hline A & -E \\ \hline \end{array}$ với hàng nào đó của bảng $\begin{array}{|c|c|}\hline U & T \\ \hline \end{array}$ cần cho kết quả không. Nếu thêm nữa công thức tính thành phần đường chéo T, chính (I.24), nên ở đây sẽ viết lại một ít thay đổi dạng

$$t_{ii} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}^2}\,. \tag{II.12}$$

thì ta sẽ có tất cả những cơ sở cần thiết để tính thành phần của ma trận U và T, và với như thế toàn bộ phân chia (II.4).

Công thức (II.6) và (II.10) có thể biểu diễn dưới dạng tọa độ sau

$$u_{ij} = (a_{ij} - t_{1i}u_{1j} - t_{2i}u_{2j} - \ldots - t_{i-1,i}u_{i-1,j}) : t_{ii} =$$

$$= (a_{ij} - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}u_{hj}) : t_{ii} ; \qquad \text{(II.13)}$$

$$i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

$$t_{ik} = u_{i1}a_{k1} + u_{i2}a_{k2} + \ldots + u_{in}a_{kn} = \sum_{h=1}^{n} u_{ih}a_{kh} ; \qquad \text{(II.14)}$$

$$i \le k, \; i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{i+1,m}.$$

Như vậy trở nên rõ hơn tuần tự tính của hàng i của bảng (UT) ($i = \overline{1,m}$).

Trước tiên theo công thức (II.12) tính thành phần đường chéo hàng i của T, tức t_{ii} ; sau đó theo công thức (II.13) tính tất cả thành phần của hàng i của U, và như thế theo (II.14) với các thành phần khác (không đường chéo) của hàng i của T với như thế tính xong hàng i của bảng (UT) và tiếp đến tính cho hàng (i + 1).

Phương pháp này thuận tiện cho tính máy tính thông thường, vì ở đó thành phần ma trận xuất phát A ghi lại đến cuối của tính toán .

Với chương trình, có khả năng ghi các thành phần của U trên thành phần tương ứng của A. Nhằm mục đích này lại cần sử dụng quá trình biến đổi tuần tự của thành phần A, tương tự như đã xét ở phụ lục I. Vì thế, sử dụng công thức (I.12b) và (I.25). Trên cơ sở này có thể viết lại các công thức sau cho biến đổi tuần tự các thành phần của ma trận xuất phát A

$$t_{rr} = \sqrt{\sum_{h=1}^{n} a^2_{rh.r-1}} ; \qquad \text{(II.15a)}$$

$$u_{rj} = a_{rj.r} = a_{rj.r-1} / t_{rr} ; \qquad \text{(II.15b)}$$

$$r = \overline{1,m} \; ; \; j = \overline{1,n} \; . \qquad \text{(II.15c)}$$

$$t_{rk} = \sum_{h=1}^{n} a_{rh.r} a_{kh.r-1} = \sum_{h=1}^{n} u_{rh} a_{kh.r-1} \; ; \qquad \text{(II.16a)}$$

$$a_{kj.k} = a_{kj.r-1} - t_{rk} a_{rj.r} \; ; \qquad \text{(II.16b)}$$

$$k = \overline{r+1,m} \; ; \; r = \overline{1,n} \; . \qquad \text{(II.16c)}$$

Mỗi một bước r của quá trình tính toán theo công thức (II.15) biến đổi hàng r ($r = \overline{1,m}$) của A, còn theo công thức (II.16) các hàng k ($k = \overline{r+1,m}$) của A. Trong trường hợp này phần của U ghi trên thành phần cùng tên của ma trận A. Với ma trận T cần tách mảng riêng.

Với suy biến của ma trận, với một i nào đó nhận được $t_{ii} = 0$. Khi đó thích hợp là toàn bộ hàng i của U cho bằng không, tức tại chỗ (II.15) đặt $a_{ij.i} = u_{ij} = 0$ ($j = \overline{1,n}$). Cùng lúc đó đặt trị không cho tất cả t_{rk} ($k = \overline{r+1,m}$) .

Lưu ý rằng chữ số i tương ứng với hàng của ma trận A mà tổ hợp tuyến tính với các hàng mang chỉ số 1, 2, ..., i-1. Nói cách khác, với suy biến của ma trận A, trong biến đổi U sẽ nhận được chừng ấy hàng hàng có trị không , từng ấy hiệu ứng của A

$$\partial(A) = \min(m,n) - \text{Rank}(A).$$

Ở mỗi một hàng trị không của A sẽ tương ứng hàng của T có trị không.

Với như thế có thể coi rằng xác định cho phân chia trực giao mở rộng cả trường hợp suy biến.

Từ những trình bày đến đây thấy rằng phân chia trực giao cho ma trận nằm ngang ($m < n$), đứng ($m > n$) và vuông ($m = n$) có thể thực hiện cùng một sơ đồ tính toán. Mặc dầu không được lẫn rằng phân chia trực giao cho ma trận ngang và đứng nhận những ký hiệu khác nhau:

a) Cho ma trận ngang (m < n):

$$\underset{(m,n)}{A^*} = \underset{(m,m)}{T^*_p}\ \underset{(m,n)}{U_p}\ , \qquad (II.17)$$

b) Cho ma trận đứng:

$$\underset{(m,n)}{A} = \underset{(m,n)}{U_h}\ \underset{(n,n)}{T_h}\ ,$$

Và trong hai trường hợp T_p và T_h là ma trận tam giác trên.

Khi A là ma trận vuông (m = n), sẽ tồn tại phân chia trực giao:

$$\underset{(m,m)}{A} = \underset{(m,m)}{T^*_p}\ \underset{(m,m)}{U_p} = \underset{(m,m)}{U_h}\ \underset{(m,m)}{T_h}\ , \qquad (II.19)$$

sao cho

$$U^*_p U_p = U_p U^*_p = E\ ,$$

$$U^*_h U_h = U_h U^*_h = E\ , \qquad (II.20)$$

Nhưng $$U_p \neq U_h\ ;\ T_p \neq T_h\ . \qquad (II.21)$$

Khi A ngoài vuông, mà còn đối xứng nữa, (II.21) có

$$U_p = U_h = U\ ,$$

$$T_p = T_h = T\ . \qquad (II.22)$$

Phụ lục III: PHÂN CHIA MA TRẬN THÀNH TÍCH CỦA HAI MA TRẬN TAM GIÁC CÓ CẤU TRÚC KHÁC NHAU

Mỗi ma trận vuông A hạng (n × n) có các định thức khác không dạng:

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0\ ,\ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Có thể phân chia thành tích của hai ma trận tam giác có cấu trúc khác nhau

$$A = G^* \quad H, \qquad \text{(III.1)}$$

$$(n,n)\ (n,n)\ (n,n)$$

Ở đây G và H là các ma trận tam giác trên.

Phân chia (III.1) không xác định đơn trị. Nó phụ thuộc vào n tham số, mà thường nhận thành phần đường chéo của G hay là H, thông thường nhận $H_{ii} = 1$. Với như thế nhận được đơn trị của phân chia (II.1).

Phương trình (III.1) có thể viết dưới ở dạng

$$-AE + G^*H = 0$$

hay

$$[A\ G^*]\ x\begin{bmatrix} -E \\ H \end{bmatrix} = 0. \qquad \text{(III.2)}$$

Phương trình (III.2) dẫn đến sơ đồ tính toán

	n	n
n	A*	-E
n	G	H

, (III.3)

trong đó đúng với quy tắc sau: Tích của cột nào đấy của bảng

A*
G

với cột nào đó của bảng

-E
H

cần cho trị giá không. Tính chất này của sơ đồ (III.3) cho phép xác định tất cả thành phần của ma trận G và H ($h_{ii} = 1$).

Viết chi tiết của sơ đồ (III.3) được cho ở bảng III.1. Khi nhân cột thứ nhất của tờ B tuần tự với tất cả cột của tờ A, nhận được tất cả thành phần hàng thứ nhất của G. Thật vậy, khi sử

dụng tính chất của sơ đồ (III.3), tức tích của cột nào đó của A với cột nào đó của B cần cho không, lập tức nhận được.

$$a_{i1}(-1) + g_{1i} .1 = 0$$

Bảng III.1

Tờ A	Tờ B
a_{11} a_{21} ... a_{n1}	-1
a_{12} a_{22} ... a_{n2}	-1
----------	----
a_{1n} a_{2n} ... a_{nn}	-1
g_{11} g_{12} ... g_{1n}	+1 h_{11} ... h_{1n}
g_{22} ... g_{2n}	+1 ... h_{2n}
----------	---------
g_{nn}	h_{nn}

Vì vậy

$$g_{1i} = a_{i1} \ (i = \overline{1,n}) .$$

Từ nhân cột thứ nhất của tờ A với cột thứ hai, thứ 3, ... Ở tờ B nhận được tất cả thành phần hàng thứ nhất của H. Ta có

$$a_{1i}(-1) + g_{11}h_{1i} = 0$$

$$h_{1i} = \frac{a_{1i}}{g_{11}} \ (i = \overline{2,n}).$$

Bây giờ sử dụng cột thứ hai của B, nhân với cột thứ hai, thứ ba, v.v.. của A. Khi sử dụng tính chất của sơ đồ tính (III.3) sẽ có

$$a_{i2}(-1) + g_{1i}h_{12} + g_{2i}.1 = 0.$$

Vì vậy

$$g_{2i} = a_{i2} - g_{1i}h_{12} \quad (i = \overline{2,n}).$$

Bây giờ nhân tuần tự cột thứ hai của A với cột thứ ba, thứ tư, v.v... của B. Kết quả nhận được

$$a_{2i}(-1) + g_{12}h_{1i} + g_{22}h_{2i} = 0 .$$

Vì vậy

$$h_{2i} = \frac{(a_{2i} - g_{12}h_{1i})}{g_{22}} \quad (i = \overline{3,n}) .$$

Với tuần tự như thế và với cách như thế tính hàng thứ hai, thứ ba, ... của G và H, đến khi đến tính thành phần g_{nn}:

$$g_{nn} = a_{nn} - g_{1n}h_{1n} - g_{2n}h_{2n} - \ldots - g_{n-1,n}h_{n-1.n} .$$

Với như thế phân chia (III.1) kết thúc.

Nếu ma trận A đối xứng và có định thức chính khác không, phân chia (III.1) có thể biểu diễn dưới dạng

$$A = G^*DG, \qquad (III.4)$$

Ở đây D là ma trận đường chéo. Nói cách khác, với đối xứng của A ta có

$$H = DG . \qquad (III.5)$$

Với tính đối xứng của A tồn tại phân chia

$$A = R^* R, \qquad (III.6)$$

Ở đây R là ma trận tam giác trên.

Phân chia (III.6) thì gọi là đưa A vào dạng tam giác.

Trong trường hợp A đối xứng và xác định dương, tức tất cả định thức con dương

$$\Delta_i > 0 \quad (i = \overline{1,n})$$

và vì thế

$$\underset{(1,n)}{X^*}\ \underset{(n,n)}{A}\ \underset{(n,1)}{X} > 0 \text{ với } X \neq 0,$$

các ma trận nhận được từ phân chia (III.4) và (III.6) là trị thực.

Phân chia (III.4) các thành phần D được tính thông thường qua công thức

$$d_{ii} = 1/g_{ii} \quad (i = \overline{1,n}) . \tag{III.7}$$

Trong trường hợp như thế thành phần đường chéo của ma trận H = DG nhận trị giá -1; còn các hàng của H tỷ lệ với các hàng của G với hệ số tỷ lệ là $1/d_{ii}$. Cái đó thực sự làm đơn giản việc tính toán ma trận H. Ở đây có thể sử dụng sơ đồ cho ở bảng III.1, nhưng tính các hàng của H thực hiện khi sử dụng tính chất tỷ lệ thuận với các hàng của G với hệ số tỷ lệ $1/d_{ii}$.

Việc tính các thành phần của R của phân chia (III.6) thực hiện theo công thức

$$r_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{h=1}^{k-1} r_{hk}} ,$$

$$r_{kj} = (a_{kj} - \sum_{h=1}^{i-1} r_{hk} r_{hj}) : r_{kk} \tag{III.8}$$

$$k = 1, 2, ..., n;$$

$$j = k+1, k+2, ..., n.$$

Việc tính toán có thể thực hiện qua tuần tự biến đổi của ma trận A

$$r_{kk} = a_{kk.k} = \sqrt{a_{kk.k-1}} ,$$

$$r_{kl} = a_{kl.k} = a_{kl.k-1} / a_{kk.k} ;$$

$$a_{ij.k} = a_{ij.k-1} - a_{ki.k} a_{kj.k} ; \tag{III.9}$$

$$k = 1, 2,..., n ;$$

$$l = k+1, k+2, ..., n ;$$

$$i = k+1, k+2, ..., n ;$$

$$j = i, i+1, ..., n.$$

Công thức (III.9) nói lên rằng tuần tự biến đổi các thành phần dưới đường chéo chính của A không tham gia và vì vậy không cần phải ghi lại. Sau n biến đổi tuần tự của A đưa đến R.

Giữa phân chia (III.6) và phân chia trực giao (xem phụ lục II) có liên quan trực tiếp.

Giả sử, ma trận ngang $\underset{(m,n)}{A}$ $(m < n)$ chịu phân chia trực giao, tức

$$\underset{(m,n)}{A} = \underset{(m,m)}{T^*_p} \quad \underset{(m,n)}{U_p} , \tag{III.10}$$

Ở đây T_p là ma trận tam giác trên, còn U_p là ma trận dạng A và các hàng trực giao với nhau, vì vậy

$$U_p U^*_p = E , U^*_p U_p \neq E. \tag{III.11}$$

Giả sử tiếp theo tạo thành ma trận

$$N = AA^* , \tag{III.12}$$

có tính đối xứng và với không suy biến của A xác định dương. Như thế với N tồn tại phân chia

$$N = R^* R. \tag{III.13}$$

Ở đây R là ma trận tam giác trên với thành phần trị thực. Khi thay (III.10) vào (III.12) và tính đến (III.11) nhận được

$$N = T^*_p U_p U^*_p T_p = T^*_p T_p . \tag{III.14}$$

Từ so sánh bên phải của (III.13) và (III.14) nhận được quan hệ cần tìm

$$R \equiv \dot{T}_p . \tag{III.15}$$

Nếu ma trận đối xứng A từ (III.16) một vài ví dụ định thức $\Delta_i = 0$, thì biến đổi nhận được $r_{ii} = 0$ và vì vậy phép chia trong công thức (III.8) và (III.9) với k = i không có thể được - quá trình tính toán bị gián đoạn. Phân chia (III.6) có thể mở rộng với trường hợp định thức - hay khi $r_{ii} = 0$, và đặt $r_{ij} = 0$ ($j = \overline{1,n}$). Theo cách tương tự với phân chia (III.4) hàng thứ i cho bằng không ở ma trận G và d_{ii} . Trong trường hợp như thế phương trình (III.15) cũng áp dụng hợp lệ cho suy biến A.

Ma trận R từ phân chia (III.6) sẽ gọi là ma trận căn tam giác trên A và ký hiệu

$$R = \sqrt{A}\,.$$

Với mỗi một ma trận xác định dương, đối xứng A, tức có thể xác định ma trận căn tam giác dưới có:

$$A = S^* S\,, \qquad \text{(III.16)}$$

sao cho S sẽ là ma trận tam giác dưới. Trong trường hợp này theo công thức (III.8) và (III.9) sẽ tương ứng công thức

$$S_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{h=k+1}^{n} S_{hk}^2}\,,$$

$$S_{kj} = (a_{kj} - \sum_{h=j+1}^{n} S_{hk} S_{hj}) : S_{kk}\,; \qquad \text{(III.17)}$$

$$k = n, n-1, \ldots, 1;\ j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

tương ứng

$$S_{kk} = a_{kk.n-k+1} = \sqrt{a_{kk.n-k}}\,,$$

$$S_{kl} = a_{kl.n-k+1} = a_{kl.n-k} / a_{kk.n-k+1}\,,$$

$$a_{ij.n-k+1} = a_{ij.n-k} - a_{ki.n-k+1} a_{kj.n-k+1}\,;$$

$$k = n, n-1, \ldots, 1\,;\ i = 1, 2, \ldots, k-1\,;$$

$$j = 1, 2, \ldots, i\,;\ l = 1, 2, \ldots, k-1;\ (i \geq j).$$

Để phân biệt với ma trận tam giác căn tạm giác trên, ma trận tam giác dưới S ta ký hiệu

$$S = \overline{A\backslash/}. \qquad \text{(III.19)}$$

Với làm việc với máy tính, ma trận tam giác trên cũng như ma trận tam giác dưới có thể ghi lên chỗ của ma trận xuất phát A. Điều đó đặc biệt nhìn thấy rõ từ công thức (III.9) và (III.18). Với trường hợp thứ nhất không cần thiết ghi thành phần dưới đường chéo chính.

Như thế qua (III.15) tìm được quan hệ giữa phân chia trực giao (phụ lụcII) và phép nhận ma trận căn tam giác trên, cũng như có thể tìm được phân chia trực giao, tương ứng của việc tìm căn ma trận tam giác dưới.

Với trường hợp, một vài định thức chính của A bằng không, việc tìm căn ma trận tam giác dưới tiến hành như đã chỉ ở trường hợp căn ma trận căn tam giác trên, tức khi $\Delta_i = 0$, đặt $S_i = 0$ ($j = \overline{1.i}$).

Phụ lục IV. NGHỊCH ĐẢO MA TRẬN

IV.1. Ma trận vuông

1. Giả sử ta có ma trận vuông A và cho rằng ma trận X , rằng
$_{(n,n)}$ $_{(n,n)}$

$$AX = XA = E. \qquad \text{(IV,1)}$$

Trong tường hợp này ma trận X gọi là nghịch đảo của A

$$X = A^{-1},$$

tức $$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \qquad \text{(IV.2)}$$

Phương trình (IV.2) phục vụ cho định nghĩa ma trận nghịch đảo.

Ta có

$$(A^{-1})^{-1} = A \,. \tag{IV.3}$$

Và đồng thời

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \,. \tag{IV.4}$$

Chỉ có ma trận không suy biến tồn tại ma trận nghịch đảo. Để có phương trình dạng (IV.2), ma trận A và A^{-1} cần phải vuông, đơn trị xác định ma trận nghịch đảo.

2. Tích của hai ma trận vuông không suy biến luôn luôn là ma trận không suy biến, tức nếu A và B vuông, không suy biến và cùng hạng (n × n), thì tồn tại A^{-1}, B^{-1} và $(AB)^{-1}$.

Sẽ chứng minh rằng

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}. \tag{IV.5}$$

Và thực vậy, ký hiệu

$$S = AB.$$

Trong trường hợp này

$$SB^{-1} = A,\ S(B^{-1}A^{-1}) = E.$$

Vì vậy

$$S^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Công thức (IV.5) có thể tổng quát cho nhiều hơn số ma trận, ví dụ

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1} \,. \tag{IV.6}$$

Phương trình (IV.6) là có được, nếu A, B, C ma trận vuông không suy biến và cùng hạng.

IV.2 Ma trận chữ nhật

1. Ma trận A và A^{-1} tương hợp nhân A với A^{-1} bên trái hay phải đều được - trường hợp riêng cho ma trận vuông. Trong các ứng dụng khác nhau của tính toán ma trận, đặc biệt trong

phương pháp bình phương tối thiểu ta còn phải làm việc với ma trận chữ nhật. Với ma trận chữ nhật phương trình (IV.1) nói chung không có thể thực hiện được. Thật vậy, nếu A thuộc dạng $(m \times n)$ $(m \neq n)$, X sẽ có dạng $(n \times m)$. Trong trường hợp này (A) và (XA) khác hạng vì vậy không có thể nói bằng nhau giữa (AX) và (XA).

Ma trận chữ nhật khác với ma trận vuông với tính chất quan trọng khác. Nếu A và B là hai ma trận tam giác vuông không suy biến cùng loại. Không như thế nếu A và B là ma trận chữ nhật. Ta chấp nhận chỉ trường hợp khi A thuộc dạng $(m \times n)$; $B(n \times m)$; với A và B không suy biến.

Có thể chứng minh rằng, ran của ma trận $\underset{(m,m)}{S} = \underset{(m,n)}{A}\ \underset{(n,m)}{B}$ là số r_s, là

$$r_s \leq \min (m,n) . \qquad \text{(IV.7)}$$

Phương trình (IV.7) chỉ ra rằng với $m > n$, S luôn luôn suy biến. Với $m < n$, khả năng với không suy biến của A và B, tức $r_A = r_B = m$, tích S sẽ suy biến. Để hiển thị điều kiện đủ ma trận S không suy biến, ta cho rằng hàng của A, tương ứng cột của B, là tọa độ của các véc tơ với cơ sở trực chuẩn trong không gian véc tơ r_n. Những véc tơ này thuộc hai hệ thống véc tơ không suy biến và ký hiệu Q_A và Q_B, sao cho Q_A xác lập không gian m chiều V_{Am}, tương ứng Q_B xác lập V_{Bm}. Nếu mỗi véc tơ của Q_A có thể thể thể hiện qua tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của Q_B và ngược lại, thì hai không gian V_{Am} và V_{Bm} trùng nhau. Chỉ trong trường hợp này tích của hai ma trận A và B cho ma trận không suy biến. Ở đây thể hiện điều kiện đủ để tích sẽ ma trận không suy biến.

Nếu V_{Am} và V_{Bm} không trùng, nhưng có miền chung xác định bởi không gian V_{AB}, mà có kích thước cho là $P < \min (m,n)$,

thì rang của S = AB sẽ là P, tức S sẽ là ma trận suy biến bởi hiệu ứng $\delta = \min(m,n) - P$.

Việc chứng minh của khẳng định trên nằm ngoài phạm vi vấn đề xem xét.

Với chúng ta ý nghĩa là tích

$$\underset{(m,m)}{N} = \underset{(n,m)}{A}\ \underset{(n,m)}{A^*} \qquad (m < n).$$

Từ diễn giải ta thấy rằng N, sẽ là ma trận không suy biến, nếu A không suy biến. Thật vậy không gian xác định từ các hàng của A trùng với không gian xác định từ các cột của A*; như thế không suy biến A là điều kiện cần cho độc lập tuyến tính của các véc tơ xác định qua các dòng của A, và như thế để phục vụ cho cơ sở của V_m .

2. Ta cho rằng $\underset{(m,n)}{A}$ ma trận ngang không suy biến (m < n).

Trong trường hợp này phương trình

$$\underset{(m,n)}{A}\ \underset{(n,m)}{X} = \underset{(m,m)}{E} \qquad (IV.8)$$

có lời giải và lời giải đó gọi là ma trận nghịch đảo của A, hay cũng gọi ma trận nghịch đảo phải.

Lời giải chung nhất của (IV.8) biểu diễn dưới dạng

$$X = A^{-1}{}_D = D^*(AD^*)^{-1}, \qquad (IV.9)$$

Ở đây D là ma trận không suy biến loại cùng A, nhưng để AD* cũng là ma trận không suy biến.

Hợp lệ của (IV.9) có thể thấy ngay sau khi thay nó vào (IV.8). Thật vậy

$$(AD^*)(AD^*)^{-1} = E\ .$$

Ở đấy (AD*) đã là ma trận vuông không suy biến.

Lời giải (IV.9) phụ thuộc vào ma trận D. Hầu như đã rõ, có thể tìm được nhiều ma trận D_i , thoả mãn yêu cầu đặt ra. Vì thế xác định ma trận ngược phải, không có thể thực hiện đơn trị.

Với ta đặt ra trường hợp thú vị

$$D \equiv A ,$$

$$A^{-1}_{p.ch} = A^*(AA^*)^{-1} . \qquad (IV.10)$$

Ma trận ngược phải xác định qua (IV.10) gọi là chính (chỉ số "ch"). Nó đóng vai trò quan trọng trong giải bài toán theo phương pháp bình phương tối thiểu.

3. Ta cho rằng A là ma trận đứng không suy biến (m > n). Trong trường hợp này có thể xây dựng phương trình dạng

$$\underset{(n,m)}{X} \quad \underset{(m,n)}{A} = \underset{(n,n)}{E} , \qquad (IV.11)$$

Ở đây X là ma trận ngược của A. Nghiệm của (IV.11) gọi là ma trận ngược trái của A và có thể biểu diễn dưới dạng

$$X = A^{-1}_{L} = (L^*A)^{-1}L^* , \qquad (IV.12)$$

Ở đấy L là ma trận không suy biến thuộc dạng A, nhưng tích (L*A) cũng không suy biến (vuông). Như vậy, (IV.12) là lời giải thực sự của (IV.11), thấy được khi thay (IV.12) vào (IV.11) nhận được:

$$(L^*A)^{-1}(L^*A) = E.$$

Và ở đây lời giải (IV.12) không đơn trị, vì có thể tìm thấy rất nhiều L_i, thoả mãn điều kiện đặt ra.

Với L ≡ A nhận được tương ứng với (IV.10) :

$$A^{-1}_{tr.ch} = (A^*A)^{-1}A^*. \qquad (IV.13)$$

Xác định theo (IV.13) ma trận ngược trái của A sẽ gọi thêm là chính.

4. Khi A là ma trận ngang không suy biến ($m < n$), khẳng định rằng A có ma trận ngược phải, và với ma trận ngược chính thì

$$AA^{-1}_{p.ch} = E\,,$$
$$A^{-1}_{p.ch}A = V \neq E\,. \qquad \text{(IV.14)}$$

Ma trận V mang một vài dấu hiệu của ma trận đơn vị E. Tính chất quan trọng nhất là

$$V^* = V,$$
$$V^2 = V\,. \qquad \text{(IV.15)}$$

Tính chất thứ nhất nói lên rằng nó là đối xứng, còn tính chất thứ hai là nhân với chính nó cho ma trận đó.

Ta sẽ chứng minh tính chất trên.

Khi thay (IV.10) vào (IV.14) và chú ý đến đối xứng của $(AA^*)^{-1}$ nhận được trực tiếp

$$V^* = A^*(AA^*)^{-1}A = V, \qquad \text{(IV.16)}$$

Tức điều muốn chứng tỏ.

Nếu bây giờ nhân V với V nhận được

$$V^2 = (A^*(AA^*)^{-1}A)(A^*(AA^*)^{-1}A) =$$
$$= A^*(AA^*)^{-1}A = V \qquad \text{(IV.17)}$$

hay cũng thế

$$V^2 = V\,,$$

tức điều muốn chứng minh.

Nếu A là ma trận đứng ($m > n$), thì

$$A^{-1}_{tr.ch}A = E$$

$$AA^{-1}_{ch.tr} = W \neq E.$$

Và ở đây ma trận W có tính chất tương tự như của V, chính là

$$W^* = W, \qquad (IV.19)$$
$$W^2 = W.$$

Vì vậy W cũng là ma trận đối xứng.

Nếu D ≠ A, tương tự L ≠ A, thì V'= D*(AD*)$^{-1}$A, tương tự W' = A(L*A)$^{-1}$L*, có tính chất nhân với chính nó cho chính nó, nhưng không đối xứng.

Mang tính chất này của ma trận chữ nhật chiếu lên trường hợp ma trận vuông, có thể rút ra: ma trận vuông có ma trận nghịch đảo trái, phải, và chúng bằng nhau.

IV.3. Lật ngược ma trận

Phần lớn vấn đề về đại số tuyến tính liên quan đến sự cần thiết lật ngược ma trận.

Trong trường hợp này sử dụng một phương pháp hiệu quả trả lời vấn đề giải quyết hiệu quả của công việc. Trong đại số tuyến tính nghịch đảo ma trận liên quan đến tính định thức, điều này không thuận tiện cho việc tính toán chương trình. Thông thường nhất ma trận nghịch đảo được tính sau khi phân chia thành tích các ma trận, mỗi một ma trận thành phần có thể lật ngược trực tiếp. Những ma trận này là đường chéo, tam giác và ma trận trực giao.

Ta thấy rằng mỗi ma trận không suy biến đều có ma trận nghịch đảo. Với mỗi ma trận ngang không suy biến có không đơn trị ma trận ngược đứng phải, và ngược lại, mỗi ma trận đứng không suy biến có không đơn trị ma trận ngược ngang:

mỗi ma trận vuông không suy biến có ma trận ngược đơn trị, và ma trận ngược phải, trái trùng nhau.

Giả sử A là ma trận ngang không suy biến thuộc loại m x n. Trong trường hợp này ta viết

$$A = T^*_p U_p \quad (U_p U^*_p = E,\ U^*_p U_p \neq E)\ , \tag{IV.20}$$

ở đây T_p là ma trận tam giác trên.

Ma trận nghịch đảo chính A tính theo công thức

$$A^{-1}_{ph.ch} = A^*(AA^*)^{-1}\ . \tag{IV.21}$$

Khi thay (IV.20) vào (IV.21) nhận được

$$\begin{aligned} A^{-1}_{ph.ch} &= U^*_p T_p (T^*_p U^*_p T_p)^{-1} = U^*_p T_p (T^*_p T_p)^{-1} = \\ &= U^*_p T_p T^{-1}_p T_p{}^{*-1} = U^*_p T_p{}^{*-1}\ , \end{aligned} \tag{IV.22}$$

ở đây ta sử dụng

$$U_p U^*_p = E\ ,\ T_p T^{-1}_p = E.$$

Tương tự, nếu A là ma trận đứng không suy biến thuộc dạng m × n (m > n) thì

$$A = U_h T_h (U^*_h U_h = E,\ U_h U^*_h \neq E)\ , \tag{IV.23}$$

ở đấy T_h là ma trận tam giác trên.

Trong trường hợp này A có ma trận ngược trái. Với ma trận ngược chính ta có

$$A^{-1}_{tr.ch} = (A^*A)^{-1}A^*. \tag{IV.24}$$

Khi thay (IV.23) vào (IV.24) nhận được

$$\begin{aligned} A^{-1}_{tr.ch} &= (T^*_h U^*_h U_h T_h)^{-1} T^*_h U^*_h = \\ &= (T^*_h T_h)^{-1} T^*_h U^*_h = \\ &= T^{-1}_h T^{*-1}_h T^*_h U_h = T^{-1}_h U^*_h. \end{aligned} \tag{IV.25}$$

Cuối cùng nếu A là ma trận vuông không suy biến, thì vì

$$A^{-1}_{ph} = A^{-1}_{tr} = A^{-1}\ . \tag{IV.26}$$

Công thức (IV.22) và (IV.25) trở thành tương đương.

Mỗi ma trận vuông với Minor chính khác không có thể phân tích thành tích của các ma trận với cấu trúc khác nhau, tức

$$A = G^* H, \qquad \text{(IV.27)}$$

Ở đây G và H là ma trận tam giác trên.

Trong trường hợp này

$$A^{-1} = H^{-1}G^{*-1}. \qquad \text{(IV.28)}$$

Nếu ma trận A đối xứng và xác định dương, thì ngoài phân chia

$$A = G^*DG = R^*R \qquad \text{(IV.29)}$$

Ở đó G và R là ma trận tam giác trên, còn D là ma trận đường chéo.

Trong trường hợp này

$$A^{-1} = G^{-1}D^{-1}G^{*-1} = R^{-1}R^{*-1}. \qquad \text{(IV.30)}$$

Tất cả nói lên rằng lật ngược ma trận không suy biến (vuông, ngang hay đứng) dẫn đến lật ngược của ma trận trực giao, đường chéo và tam giác.

Vì theo định nghĩa ma trận trực giao là ma trận mà ma trận nghịch đảo trùng với ma trận hoán vị, thì rõ ràng rằng lật ngược một ma trận trực giao dẫn đến hoán vị của nó.

Lật ngược ma trận đường chéo hay tam giác thực hiện một cách trực tiếp.

1. Lật ngược ma trận đường chéo. Giả sử D có dạng /m x m/ là đường chéo, tức

$$D = (d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{mm}) = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{mm} \end{bmatrix}. \qquad \text{(IV.31)}$$

Trong trường hợp này D^{-1} có thể viết

$$D^{-1} = (d^{11}, d^{22}, ..., d^{mm}) = \begin{bmatrix} d^{11} & & & \\ & d^{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d^{mm} \end{bmatrix}. \qquad (IV.32)$$

ở đây $$d^{ii} = \frac{1}{d_{ii}} \quad , \; i = \overline{1.m} \; . \qquad (IV.33)$$

Có thể kiểm tra rằng $DD^{-1} = D^{-1}D = E$.

Với $d_{ii} = 0$, tức suy biến, đặt $d^{ii} = 0$.

2. Lật ngược ma trận tam giác. Giả sử có ma trận tam giác trên (3×3)

$$\underset{(3,3)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{bmatrix}. \qquad (IV.34)$$

Ta cho rằng A^{-1} biểu diễn dưới dạng

$$\underset{(3,3)}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{bmatrix}. \qquad (IV.35)$$

Sẽ xác định thành phần a^{ij} của ma trận nghịch đảo, xuất phát từ phương trình

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \qquad (IV.36)$$

Khi sử dụng (IV.36) nhận được

$$a^{11}a_{11} = 1 \; , \quad a^{11} = \frac{1}{a_{11}} \; ;$$

$$a^{21}a_{11} = 0 \; , \quad a^{21} = 0 \; ;$$

$$a^{31}a_{11} = 0 \; , \quad a^{31} = 0 \; ;$$

$$a^{21}a_{12} + a^{22}a_{22} = 1\ ,\quad a^{22} = \frac{1}{a_{22}}\ ; \qquad \text{(IV.37a)}$$

$$a^{31}a_{12} + a^{32}a_{22} = 0\ ,\quad a^{32} = 0\ :$$

$$a^{31}a_{13} + a^{32}a_{23} + a^{33}a_{33} = 1\ ,\quad a^{33} = \frac{1}{a_{33}}$$

Ta thấy tất cả các thành phần dưới đường chéo chính của A^{-1} bằng không, còn thành phần đường chéo bằng trị nghịch đảo giá trị của thành phần đường chéo tương ứng của ma trận xuất phát A.

Nói chung lật ngược một ma trận tam giác, kết quả vẫn giữ dạng của tam giác xuất phát. Nếu lật ngược ma trận tam giác trên, nhận được ma trận tam giác trên; nếu lật ngược ma trận tam giác dưới ta cũng nhận được ma trận tam giác dưới.

Tiếp theo ta có

$$a^{11}a_{12} + a^{12}a_{22} = 0\ ,\quad a^{12} = -a^{11}a_{12} : a_{22}\ ;$$

$$a^{22}a_{23} + a^{23}a_{33} = 0\ ,\quad a^{23} = -a^{22}a_{23} : a_{33}\ ; \qquad \text{(IV.37b)}$$

$$a^{11}a_{13} + a^{12}a_{23} + a^{13}a_{33} = 0\ ,\quad a^{13} = -(a^{11}a_{13} + a^{12}a_{23}) : a_{33}$$

Công thức trên có thể tổng quát hoá cho trường hợp $(n \times n)$.

Ta có

$$a^{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$$

$$a^{ij} = -\left(\sum_{k=1}^{j-1} a^{ik}a_{kj}\right) : a_{jj}\ ;$$

$$i = 1, 2, \ldots, n\ ;\ j = i+1, i+2, \ldots, n; \qquad \text{(IV.37c)}$$

$$a^{ij} = 0 \text{ với } i > j.$$

Đến đây ta đã xem xét vấn đề lật ngược ma trận tam giác trên. Trong tường hợp lật ngược ma trận tam giác dưới, có thể sử dụng phương trình

$$A^{*-1} = (A^{-1})^* ,$$

qua đó bài toán dẫn đến lật ngược ma trận tam giác trên.

Công thức (IV.37c) cho phép tính ma trận nghịch đảo thực hiện theo dòng, bắt đầu từ hàng đầu tiên. Hơn thế với máy tính thành phần a^{ij} có thể ghi lên thành phần a_{ij} .

Ở một vài trường hợp (ví dụ phương pháp tăng trưởng) với chúng ta cần thiết công thức cho phép tính nghịch đảo ma trận tam giác bắt đầu không phải thành phần đầu tiên a^{11}, mà từ thành phần cuối cùng a^{nn}. Trong trường hợp này trước hết tính cột cuối cùng, bắt đầu từ thành phần đường chéo, sau đó đến thành phần trước cuối cùng, cũng bắt đầu từ thành phần đường chéo của nó, cho đến khi đến thành phần đầu tiên a^{11}. Để dẫn công thức ta sử dụng phương trình cơ bản (IV.36). Ta có

$$a_{22}a^{23} + a_{23}a^{33} = 0 \ , a^{23} = -(a_{23}a^{33}) : a_{22} ;$$

$$a_{11}a^{13} + a_{12}a^{23} + a_{13}a^{33} = 0 \ , a^{13} = -(a_{12}a^{23} + a_{13}\, a^{33}) : a_{11} ;$$

$$a_{11}a^{12} + a_{12}a^{22} = 0 \ , a^{12} = -(a_{12}a^{22}) : a_{11} . \qquad \text{(IV.38a)}$$

Từ công thức trên và từ quan sát công thức (IV.37a) dẫn ra quan hệ chung sau:

$$a^{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$$

$$a^{ij} = -\left(\sum_{k=i+1}^{j} a_{ik}a^{kj} \right) . a^{ii}$$

$$i = n, n-1, \ldots. 1; \ j = i+1, i+2, \ldots, n$$

$$a^{ij} = 0 \ \text{ với } i > j .$$

Công thức (IV.37) và (IV.38) sử dụng để tính toán và ma trận R^{-1} ghi ngay lên chỗ R.

IV.4. Lật ngược với trường hợp suy biến

Khi xét ở phụ lục II và phụ lục III phân chia trực giao và khai căn ma trận, ta đã chỉ ra tiến hành như thế nào với trường hợp suy biến, tức mở rộng định nghĩa cho phân chia trực giao và khai căn và với trường hợp suy biến. Để mở rộng cho trường hợp ma trận nghịch đảo, đối với chúng ta vừa đủ là về ma trận tam giác nghịch đảo và với trường hợp suy biến.

Một ma trận tam giác không suy biến, khi thành phần đường chéo chính không có thành phần không và ngược lại, nếu thành phần đường chéo chính của một ma trận tam giác có trị không thì ma trận suy biến. Hiệu ứng ∂ trùng với số không của đường chéo chính

Một ma trận tam giác suy biến phải nghịch đảo có thể tìm thấy ứng dụng trong trường hợp giải quyết một loạt vấn đề của đại số tuyến tính, và đặc biệt trong phương pháp bình phương tối thiểu, nếu có tính toán đơn trị, theo các quy tắc đặt ra nghiêm ngặt sao cho khi vứt bỏ nguyên nhân gây suy biến và nếu khi giải lại bài toán, nhận được cùng kết quả. Điều đó thường đạt được qua bỏ đi một dòng, một cột hay một dòng và một cột (với hiệu ứng $\partial = 1$) ở ma trận xuất phát, điều đó dẫn đến giảm kích thước của ma trận xuất phát.

Nếu ở ma trận tam giác đã cho thành phần đường chéo thứ i có trị không, thì ma trận tam giác nghịch đảo trị không đặt cho hàng i và cột i, tức $r_{ii} = 0$ thì $r^{ij} = r^{ji} = 0$ cho tất cả khả năng j. Cách nghịch đảo này trong tài liệu hay gọi nghịch đảo G, còn

ma trận nghịch đảo G của ma trận suy biến A ký hiệu là A^+. Trong trường hợp này có thể viết

$$A^+ A = A A^+ = E^+,$$

Ở đây E^+ khác với E ở chỗ E^+ có số đường chéo bằng không đúng bằng số hiệu ứng ∂ của A.

Với ma trận chữ nhật:

a) Với ma trận ngang:

$$A A^+_D = E^+ , A^+_D = D^*(AD^*)^+ ; \qquad (IV.39)$$

b) Với ma trận đứng

$$A^+_L A = E^+ , A^+_L = (L^*A)^+ L^*. \qquad (IV.40)$$

Ma trận D và L trong (IV.39) và (IV.40) cần thuộc loại của ma trận xuất phát, nhưng có trị không ở định thức con Δ_i, mà chỉ số trùng với hàng (với ma trận ngang), tương ứng cột (với ma trận đứng) gây nên ma trận suy biến (xuất hiện tổ hợp tuyến tính với các hàng trước, tương ứng cột).

Cuối cùng đánh dấu nhớ rằng hai định nghĩa về ma trận chữ nhật ngược chính (ngang và đứng) có thể tổng quát vào một.

1) Với trường hợp không suy biến

$$A . A^{-1} . A = A \qquad (IV.41a)$$

hay

$$A^{-1} A A^{-1} = A^{-1} \qquad (IV.41b)$$

với tính chất

$$(A A^{-1})^* = A A^{-1} , (A A^{-1})^2 = (A A^{-1}) ;$$
$$(A^{-1} A)^* = A^{-1} A , (A^{-1} A)^2 = (A^{-1} A) . \qquad (IV.42)$$

2) Với trường hợp suy biến

$$A\,A^{+}A = A \tag{IV.43a}$$

hay

$$A^{+}\,A\,A^{+} = A^{+} \tag{IV.43b}$$

với tính chất

$$(AA^{+})^{*} = (A\,A^{+}),\ (A\,A^{+})^{2} = (A\,A^{+})\ ;$$

$$(A^{+}\,A)^{*} = (A^{+}A),\ (A^{+}A)^{2} = (A^{+}A)\ ;$$

Chúng ta đã cảm nhận rằng định nghĩa trên đồng thời cho các ma trận nghịch đảo vuông và cả trường hợp chữ nhật. Công thức (IV.43) và (IV.44) hợp lý cho ma trận nghịch đảo G.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Giyoi, V.* Interativnaja mashinaja graphica, "Mir", Moxkva, 1981 (Đồ họa máy tính trực diện).
2. *Zekevich, O.* Metod konechnưx elementov, "Mir", Moxkva, 1985 (Phương pháp phần tử hữu hạn).
3. *Zlatanov, G.* Xifrov model relep – Edna conxepja, canferexia, Plovdiv, 1985 (Mô hình số địa hình – một quan điểm).
4. *Zlatanov, G.* Elektrono – Izchislitelna texnica v Geodezjata, Texnica, Sofia, 1979 (Kỹ thuật tính toán trong trắc địa).
5. *Mitchel, E, P.Uet.* Metod conechnưx elemetov dlja uravnenii z trastnưmi proizvodnưmi, "Mir", Moxkva, 1981 (Phương phắp phần tử hữu hạn cho phương trình vi phân đạo hàm riêng).
6. *Nataxon, I.P.* Construktivnaja teoria funcxii. Moxkva, 1949 (Lý thuyết cấu trúc hàm số).
7. *Rodge, D, Adam.* Matematicheskie osnovư mashinoi graphiki, "Mashino stroenie", Moxkva, 1980 (Cơ sở toán học cho đồ họa chế tạo).

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu 3

Chương 1

MỘT SỐ CÔNG CỤ TOÁN HỌC CƠ BẢN

1.1. Một số khái niệm cơ bản về đường và mặt trong không gian ba chiều 5
1.1.1. Mô tả tham số của đường và mặt 5
1.1.2. Đa thức Berstain - Beze 6
1.1.3. Đường cong Beze 8
1.1.4. Mặt Beze 10
1.1.5. Phương trình mặt trong lân cận điểm đã cho 12

1.2. Phần tử tam giác 14
1.2.1. Nội suy Lagrang 15
1.2.2. Nội suy Ermit 17
1.2.3. Xác định nhận biết điểm thuộc tam giác 19

Chương 2

XỬ LÝ SỐ LIỆU ĐO TRẮC ĐỊA

2.1. Mảng thông tin 20
2.2. Tính toán chuẩn bị 21
2.3. Tính toán bình sai 22
2.4. Thành lập hệ thống phương trình gốc 58
2.5. Ứng dụng bình sai điều kiện trong tính toán trắc địa 71
2.5.1. Bình sai điều kiện 71

2.5.2. Giải bài toán bình sai điều kiện theo phương pháp trực giao tuần tự (phương pháp trực tiếp) 74
2.5.3. Sơ đồ khối và đồ hình để giải bài toán bình sai điều kiện theo phương pháp trực giao tuần tự 79

2.6. Sơ đồ tổng quát giải bài toán chuẩn của phương pháp bình phương tối thiểu.....85
2.6.1. Thuật toán tổng quát để giải bài toán theo phương pháp bình phương tối thiểu (K - thuật toán).....85
2.6.2. Ứng dụng của K - thuật toán.....88
2.6.3. Bình sai điều kiện với ẩn số như là thuật toán toàn năng để giải bài toán theo phương pháp bình phương tối thiểu 93

2.7. Thuật toán giải hệ thống lưới đo đạc lớn.....111
2.7.1. Giải mạng trắc địa lớn theo phương pháp tăng trưởng 112
2.7.2. Thuật toán co đặc 123
2.7.3. Bình sai điều kiện nhiều nhóm với ẩn số.....132

2.8. Các phương pháp lặp giải hệ phương trình tuyến tính..137
2.8.1. Phương pháp gần đúng dần 139
2.8.2. Phương pháp lặp nhóm.....140
2.8.3. Phương pháp gần đúng nhanh nhất (phương pháp gradien) 142
2.8.4. Phương pháp gradien căng 144

Chương 3

MÔ HÌNH SỐ ĐỊA HÌNH VÀ ỨNG DỤNG CỦA NÓ TRONG TỰ ĐỘNG HOÁ THIẾT KẾ QUY HOẠCH ĐỨNG

3.1. Khả năng thành lập mô hình số địa hình.....156

3.2. Cấu trúc mô hình số địa hình vùng rộng lớn.....158

3.3. Phương pháp thành lập mô hình số địa hình.....159

3.3.1. Xác định độ cao của các điểm khống chế.....161
3.3.2. Xác định độ cao của điểm chi tiết.....162
3.4. Tối ưu thiết kế quy hoạch đứng.....168
3.4.1. Thiết kế mặt phẳng.....170
3.4.2. Thiết kế mặt.....175

Chương 4

TỰ ĐỘNG HOÁ QUÁ TRÌNH THÀNH LẬP BÌNH ĐỒ VÀ BẢN ĐỒ

4.1. Về tự động hóa thành lập bình đồ và bản đồ.....183
4.2. Thuật toán tự động hóa thành lập bình đồ và bản đồ....184
4.1.1. Thuật toán nội suy đường cong được cho bởi các điểm rời rạc.....184
4.2.2. Vẽ tự động đường bình độ.....187

PHỤ LỤC 1

Phụ lục I. Phương pháp Gram - Smith về trực giao tuần tự hệ thống véc tơ 200
Phụ lục II. Phân chia trực giao ma trận 208
Phụ lục III: Phân chia ma trận thành tích của hai ma trận tam giác có cấu trúc khác nhau 215
Phụ lục IV. Nghịch đảo ma trận 222
Tài liệu tham khảo.....237